

5. *Временски променљиве електричне струје, наизменичне струје*

5.1. ОПШТИ ПОЈМОВИ

У погледу зависности од времена струје се могу поделити у две класе:

- временски константне струје,
- временски променљиве струје.

Иста подела важи и за друге величине (напон, електромоторна сила, снага), али ћемо у овом уџбенику својства величина променљивих у времену најчешће показати на примеру струје.

Временски константна струја има стално исти интензитет и смер у току посматраног временског интервала.

Временски променљиве струје деле се у две групе: на оне променљивог интензитета у времену, а стално истог смера, и струје које поред промене интензитета у времену мењају повремено и смер. Прва група струја назива се временски променљиве једносмерне струје, а друга група — наизменичне струје.

Наизменична струја представља такав вид организованог кретања наелектрисања при чему се количина електрицитета кроз попречни пресек проводника мења у току времена, а повремено мења и смер свог кретања. Услед тога, да бисмо описали ову струју, потребно је знати њен интензитет и смер у сваком тренутку.

Тренутном вредношћу наизменичне струје назива се интензитет струје у датом тренутку времена t . Тренутна вредност наизменичне струје обележава се малим словом i , док се тренутне вредности електромоторне силе (у даљем тексту скраћено ems), напона и снаге означавају са e , u , p , респективно.

Наизменичне струје деле се на:

- Периодичне, чије се промене интензитета и смера периодично понављају у једнаким временским интервалима,
- неперидичне, чији се процес промена не понавља.

Примерен значај у електротехници имају периодичне струје, које могу бити:

- простопериодичне, чије се промене интензитета и смера периодично понављају са временом по синусном или косинусном закону. У оквиру овог излагања ми ћемо све простопериодичне струје сводити на синусни облик^{*1)}, што је ствар договора;

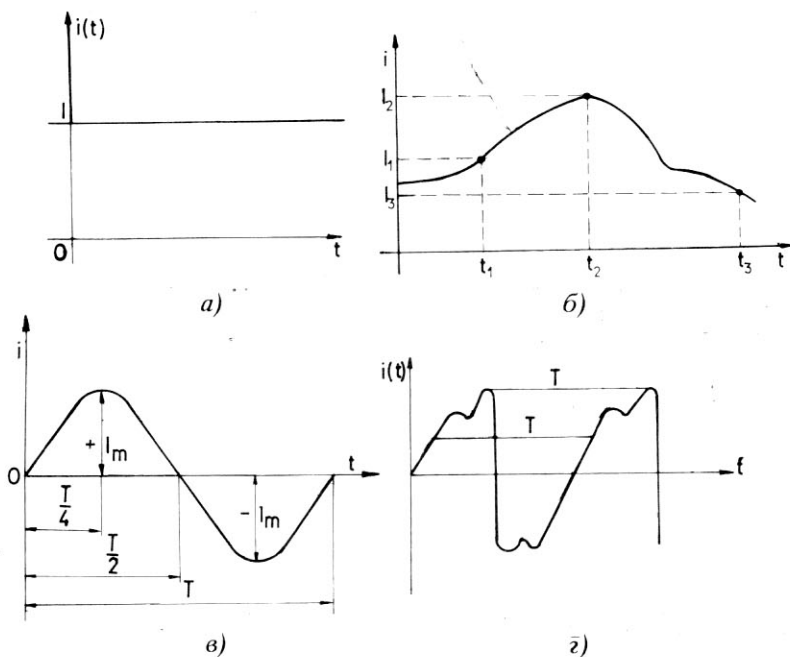
- сложено периодичне, чије се промене интензитета и смера периодично мењају са временом, али по сложеним математичким законима.

^{*1)} Неки аутори користе косинусну функцију времена, али прелаз са синусне зависности од времена на косинусну сасвим је једноставан с обзиром на познату тригонометријску идентичност:

$$\sin x = \cos (x - \pi/2).$$

Интензитет и смер посматране струје могу се приказати у облику временског дијаграма и при томе се на апсцисну (x) осу наноси време, а на ординату (y) тренутна вредност ове величине. Овакав дијаграм назива се и таласним обликом струје (ems, напона, снаге). Прецизније, талас би представљао променљив сигнал у простору, али је овакав назив одомаћен у електро-техничкој пракси.

На слици 5.1 a , b , v , z , приказани су таласни облици: a) једносмерне струје константног интензитета I ; b) временски променљиве једносмерне струје; v) простопериодичне наизменичне струје синусног облика; z) сложенепериодичне наизменичне струје.



Сл. 5.1

Детаљно ћемо проучити простопериодичне наизменичне струје, које ћемо даље кратко звати — наизменичне струје.

У практичној електротехници неопходна су кола једносмерне струје (електролиза, галванизација, струјна кола за пуштање SUS-мотора у рад, нека решења у теорији телекомуникација, у мерној техници итд.) и, у знатно већој мери, кола наизменичне струје

Постојећи електроенергетски системи снабдевени су трофазном наизменичном струјом, а потребе за једносмерном струјом решене су, углавном, помоћу наизменичне струје, применом усмерача („исправљача“). Само тамо, где се не може применити овај принцип, користе се галвански елементи или акумулатори.

Предности наизменичне струје над једносмерном врло су велике. Поред већ већ поменути чињенице да је основно снабдевање електричном енергијом

спроведено трофазном наизменичном струјом, важно је истаћи изванредна техничко-економска решења трофазних генератора и неограничене могућности трансформације и преноса на даљину, што се са електричном енергијом једносмерне струје није могло остварити. Томе треба додати и веома прилагодан начин коришћења наизменичне струје у свим областима технике и стандарда. Проучавајући електрокинетику видели смо да једносмерна струја производи одређене ефекте само на отпорнику отпорности R , док калем индуктивности L није утицао на стационаран режим рада електричног кола, а оптерећен кондензатор капацитивности C представља прекид овог кола. Међутим, у колу наизменичне струје сва три елемента електричног кола производе одређене ефекте: а) отпорник отпорности R , слично као и у колима једносмерне струје, делује својим напонам $u = Ri$, у њему се електрична енергија по Џуловом закону претвара у топлоту и често га називамо активном отпорношћу; б) калем индуктивности L изложен је променљивој струји i , па је у њему стално присутна појава самоиндукције са емс $e = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$; кондензатор капацитивности C више не представља прекид кола, јер напон на њему зависи од количине електрицитета на његовим облогама која је сада променљива са временом, па како је $u = \frac{\Delta q}{C}$, а $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$, кондензатор ће се непрекидно наизменично пунити и празнити.

5.2. ПРИНЦИП ПРОИЗВОДЊЕ НАИЗМЕНИЧНЕ ЕЛЕКТРОМОТОРНЕ СИЛЕ — ГЕНЕРАТОР НАИЗМЕНИЧНЕ ЕМС

У хомогено магнетно поље индукције $\vec{B}$ унесимо равну проводну контуру површине S као на слици 5.2. Флукс вектора $\vec{B}$ кроз површину $\vec{S}$ биће дат у изразу:

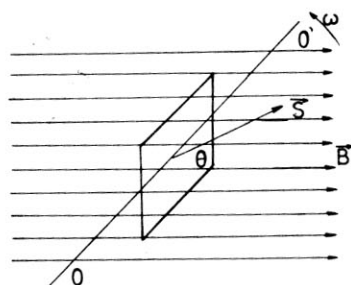
$$\Phi = \vec{B} \vec{S} = BS \cos \theta, \quad (5.1)$$

где је θ угао између вектора $\vec{B}$ и $\vec{S}$. Вредност флукса кроз површину $\vec{S}$ можемо најједноставније мењати променом угла θ . Нека контура ротира равномерном угаоном брзином ω око осе $\sigma\sigma'$ у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату. С обзиром на то да је угаона брзина промена угла θ у јединици времена, произилази да је:

$$\theta = \omega t, \quad (5.2)$$

па једначина 5.1 добија облик:

$$\Phi = BS \cos \omega t = \Phi_m \cos \omega t. \quad (5.3)$$



Сл. 5.2

Флукс кроз површину $\vec{S}$ мења свој интензитет у сваком тренутку, а повремено и знак. Промена флукса са временом врши се по косинусном закону. Дакле, добили смо простопериодичну величину. Из електромагнетизма је познато да свака промена флукса изазива електромагнетну индукцију, па ће се у овом случају на крајевима контуре индуковати емс која је сразмерна брзини промене флукса кроз контуру:

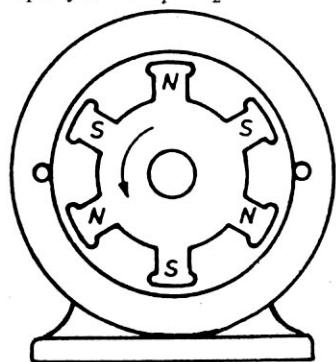
$$e = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (5.4)$$

Таласни облици флуksа кроз контуру и индуковане емс у контури приказани су на слици 5.3. За почетак посматрања појаве, дакле, време $t=0$, изабрали смо тренутак када је површина контуре под правим углом у односу на вектор $\vec{B}$, тј. када су вектори $\vec{S}$ и $\vec{B}$ колинеарни па је угао $\theta=0$. Таласни облик индуковане емс нацртали смо на основу таласног облика флуksа, на начин описан у поглављу о електромагнетизму.

На слици 5.3 види се да се као последица простопериодичног флуksа, који се са временом мења по косинусном закону, у контури индуковала простопериодична наизменична емс која се са временом мења по синусном закону. Сада можемо написати и израз за тренутну вредност наизменичне емс:

$$e = E_m \sin \omega t, \quad (5.5)$$

где је E_m максимална вредност наизменичне емс коју она достиже при најбржој промени флуksа кроз површину контуре, а то се постиже у тренуцима када флуks има вредности једнаке нули (на слици 5.3 флуks је једнак нули у тренуцима t_1 и t_2).



Сл. 5.4

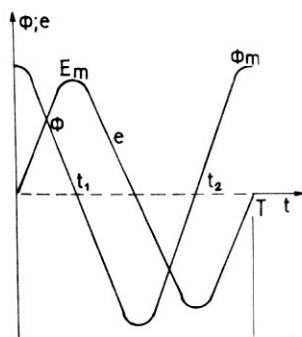
Максимална вредност емс директно је сразмерна максималној вредности флуksа. Такође, што је угаона брзина којом ротира контура већа, то је и промена флуksа кроз површину S бржа што повећава максималну вредност емс, па је:

$$E_m = \omega \Phi_m. \quad (5.6)$$

На принципу електромагнетне индукције заснива се рад снажних генератора наизменичне емс. Генератор се израђује са непокретним намотајем — статором и обртним електромагнетом — ротором (слика 5.4). При томе се принцип њиховог рада не разликује од овога о коме смо говорили. У таквим генераторима се механичка енергија претвара у електричну.

5.2.1. ПАРАМЕТРИ НАИЗМЕНИЧНЕ СТРУЈЕ

Параметри наизменичне струје (напон, емс, снаге), такве су константне величине дате струје које у потпуности одређују процес њене промене са временом. Посматрајмо таласни облик струје са слике 5.1в. Интензитет ове струје мења се са временом: струја од вредности $i=0$ расте у позитивном смеру до максималне вредности I_m , затим се њен интензитет смањује до нуле, струја мења смер и достиже максималну негативну вредност $-I_m$, па расте до



Сл. 5.3

нуле. Даље се са временом све периодично понавља. Тренутна вредност ове струје дата је у изразу:

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (5.7)$$

Периода је временски интервал после чијег истека се вредности назменичне струје понављају и по интензитету и по смеру. Овај временски интервал обележавамо са T , а јединица у SI систему је $T_u = s$ (секунда). За струју која је у току периоде T извршила све промене по интензитету и смеру каже се да је извршила један циклус.

У техници се користе наизменичне струје чија се периода мери деловима секунде (ms, μs).

Фреквенција је број целих циклуса у једној секунди, тј. број периода у једној секунди. Ако је периода краћа, то се више осцилација изврши у једној секунди, што значи да су периода и фреквенција узајамно реципрочне величине. Фреквенција се обележава са f , па је:

$$f = \frac{1}{T}, \quad (5.8)$$

Јединица за фреквенцију у SI систему је:

$$f_u = \frac{1}{s} = \text{Hz} \text{ (херц, по немачком физичару Heinrichu Hertzu, 1857—1894. година).}$$

Израчунаћемо сада фреквенцију емс индиковане у намотају генератора на слици 5.4. Ако се ротор састоји од два магнетна пола и врши n обртаја у минути, онда је фреквенција $f = \frac{n}{60}$. С обзиром на то да се у пракси користе вишеполни ротори, па ако се број пари полова означи са p , добија се:

$$f = \frac{pn}{60}. \quad (5.9)$$

Таласна дужина је растојање на којем се распростре простопериодична електромагнетна енергија за време од једне периоде. Таласна дужина обележава се са λ , а мери се у метрима. Електромагнетна енергија простире се кроз ваздух брзином светлости $c = \frac{300\,000 \text{ km}}{s}$, па је:

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}. \quad (5.10)$$

За друге средине та брзина је мања и зависи од диелектричке константне средине.

Амплитуда је највећа вредност коју постиже наизменична струја (напон, емс, снага). У току периоде, наизменична струја два пута постиже амплитудну вредност: једанпут у позитивном и једанпут у негативном смеру. Амплитудне вредности обележавају се великим словима и индексом $_m$ (максимум). Амплитуда или максимална вредност струје обележава се са I_m , амплитуда емс са E_m , амплитуда напона са U_m .

Ефективна вредност наизменичне струје. Није увек погодно користити тренутне вредности наизменичних величина, јер оне карактеришу струју,

напон или емс само у неком тренутку времена. Такође није погодно да се користе ни амплитудне вредности, јер наизменичне величине постижу максималну вредност само два пута у току периоде. У пракси је погодно да се пореде струје по њиховом топлотном дејству, јер оно не зависи од фреквенције, а карактерише се количином електричне енергије која се у отпорнику отпорности R претвори у топлотну енергију. Ако наизменична струја, успостављена у отпорнику отпорности R у току периоде T развија неку количину топлотне енергије W_1 , онда увек можемо изабрати константну струја таквог интензитета I , која на том истом отпорнику за то исто време развија исту количину топлотне енергије. Може се рећи да су ове две струје једнаке по свом топлотном ефекту. Константна струја која би вршила исти топлотни ефекат као и посматрана наизменична струја је **ефективна** вредност те наизменичне струје. Ефективне вредности наизменичних величина обележавају се великим словима: за струју — I , за напон — U , за емс — E .

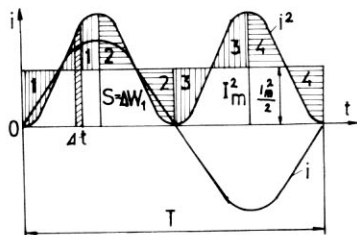
Количина топлотне енергије W коју развија константна струја интензитета I на отпорнику отпорности R , за време T , израчунава се по Џуловом закону:

$$W = Ri^2 T.$$

Количина топлотне енергије ΔW коју развија наизменична струја на истом отпорнику у току малог интервала времена Δt израчунава се као:

$$\Delta W_1 = Ri^2 \Delta t.$$

На слици 5.5 ΔW_1 је приказано као шрафирана површина на правоугаонику са основом t и висином i (R је константна величина). Укупна количина топлотне енергије једнака је површини ограниченој апсисном осом и кривом која представља зависност квадрата тренутне вредности струје од времена. Геометријска конструкција приказана на слици 5.5 омогућава да докажемо да је ова површина једнака површини правоугаоника са основом T и висином $\frac{I_m^2}{2}$, тј. $\frac{I_m^2}{2} T$. Из



Сл. 5.5

тога произлази да је количина топлотне енергије коју развија наизменична струја за време једне периоде T :

$$W_1 = R \frac{I_m^2}{2} T.$$

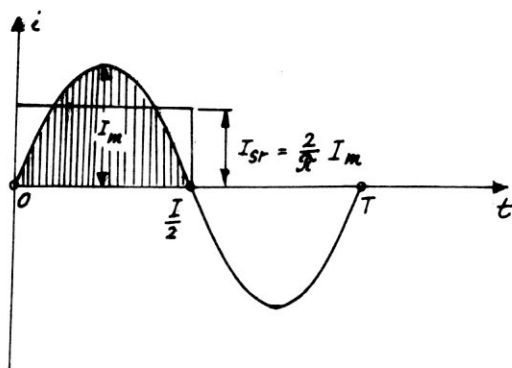
Ако сматрамо да је наизменична струја извршила исти ефекат као једносмерна $W_1 = W$, то је ефективна вредност наизменичне струје једнака:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m. \quad (5.11)$$

Аналогни односи важе и за напон, односно емс:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m.$$

Средња вредност наизменичне струје. Поред ефективних и максималних вредности наизменичне струје (напона, емс) понекад се у електротехници употребљава средња полупериодна, тј. средња апсолутна вредност или краће средња вредност наизменичне струје. За средњу вредност наизменичне струје може се рећи да је она једнака интензитету константне струје при којој би за време позитивне половине периода протекла кроз коло иста количина електрицитета као и при посматраној наизменичној струји (слика 5.6). Шрафирана површина оивичена позитивним полуталасом наизменичне струје и временском осом представља протеклу количину електрицитета кроз коло за време $\frac{T}{2}$. Према томе, средња вредност ове струје I_{sr} има исту вредност као и висина правоугаоника који има исту основу $\frac{T}{2}$ и површину једнаку шрафираној.



Сл. 5.6

Израчунавање средње вредности наизменичне струје врши се уз помоћ посебне математичке области — интегралног рачуна, па ћемо овде написати само крајње изразе:

$$I_{sr} = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m \approx 0,9 I. \quad (5.12)$$

Средње вредности наизменичног напона и емс су:

$$U = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m \approx 0,9 U; \quad E_{sr} = \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m \approx 0,9 E.$$

На слици 5.6 јасно се види зашто се средња вредност наизменичне струје дефинише за време једнако половини периоде $\frac{T}{2}$. Ако бисмо посматрали целу периоду T , све наизменичне струје синусног облика имају средњу вредност једнаку нули, пошто су површине позитивног и негативног полуталаса једнаке, а супротног знака.

5.2.2. ФАЗА, ПОЧЕТНА ФАЗА И ФАЗНА РАЗЛИКА НАИЗМЕНИЧНИХ ВЕЛИЧИНА

Приликом извођења израза за флукс магнетне индукције $\vec{B}$ кроз површину $\vec{S}$ проводне контуре узели смо да се угао θ мења у времену као $\theta = \omega t$. То значи да смо време почели да рачунамо када је θ било једнако нули, тј. када је флукс био максималан. Да смо време почели да рачунамо када је између вектора $\vec{B}$ и $\vec{S}$ био неки угао θ_0 , онда би у неком тренутку t угао између вектора $\vec{B}$ и $\vec{S}$ био:

$$\theta_1 = \omega t + \theta_0. \quad (5.13)$$

У том случају флукс би се мењао по закону:

$$\Phi = \Phi_m \cos(\omega t + \theta_0). \quad (5.14)$$

а индукована емс би имала тренутну вредност одређену изразом:

$$e = E_m \sin(\omega t + \theta_0). \quad (5.15)$$

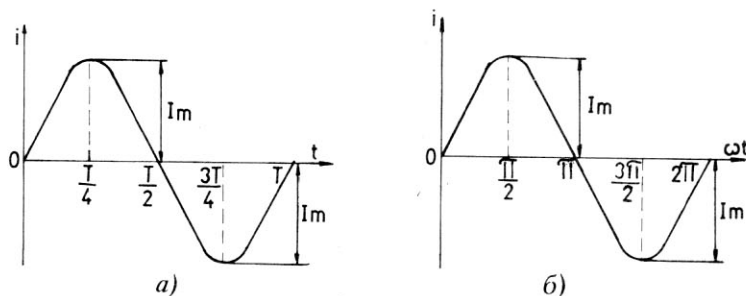
Угао θ_1 представља **тренутну фазу**, краће **фазу** наизменичне емс и одређује њен интензитет и смер у сваком тренутку времена t . Фаза наизменичне величине промени се за угао 2π радијана или 360 степени за време једнако периоди T .

Угаону брзину ω називамо **кружном фреквенцијом** или **кружном учешћу** наизменичне величине. Како је $\theta = \omega t$, следи да је $\omega = \frac{\theta}{t}$, тј. за $\theta = 2\pi$, а $t = T$ кружну фреквенцију израчунавамо помоћу једначине:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (5.16)$$

Јединица за кружну фреквенцију у СИ систему је радијан у секунди $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$.

Таласне облике наизменичних величина можемо цртати и тако што на апсцисну осу наносимо фазу (јер је ω константа). Времену $t = \frac{T}{4}$ одговара промена фазе за $\frac{\pi}{2}$. За $T = \frac{T}{2}$ промена фазе је за π , за $t = \frac{3T}{4}$ промена фазе је $\frac{3\pi}{2}$ и за $t = T$ фазни угао се промени за 2π (слика 5.7а, б).



Сл. 5.7а, б

Угао θ_0 представља **почетну фазу** наизменичне емс и одређује њен интензитет у тренутку када почињемо да посматрамо наизменичну величину, тј. у тренутку $t=0$.

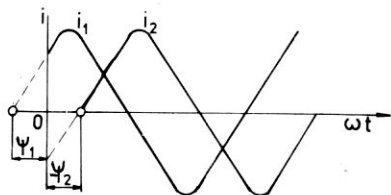
Једначина 5.15 је најопштији израз за тренутну вредност наизменичне емс e .

Аналогно претходним дефиницијама, тренутна вредност наизменичне струје у потпуности је описана релацијом:

$$i = I \sin(\omega t + \psi),$$

а тренутна вредност напона описана је једначином:

$$u = U_m \sin(\omega t + \theta_u).$$



Сл. 5.8

Почетна фаза наизменичне величине може бити позитивна величина (почетак синусоиде је померен улево од координатног почетка), или негативна (почетак синусоиде је померен удесно). На слици 5.8 приказани су таласни облици струје i са позитивном почетном фазом и струје i_2 са негативном почетном фазом.

Фазна разлика. Из једначине 5.15 видимо да су за емс (струја, напон), која се мења по синусном закону, карактеристичне ове величине:

- максимална вредност или амплитуда емс E_m (I_m , U_m),
- кружна фреквенција ω или фреквенција f или периода T ,
- почетна фаза.

Две наизменичне величине исте природе могу се међусобно разликовати по било којој од карактеристичних величина или по свима.

Када две наизменичне величине имају једнаке фазе, онда се за њих каже да су у фази. Ако су им фазе различите, онда се каже да нису у фази. За ону наизменичну величину која има већу фазу каже се да фазно предњачи другој, а за другу, чија је фаза мања, каже се да фазно заостаје од прве. Максималне и остале карактеристичне вредности оне наизменичне величине која има већу фазу настају раније него друге чија је фаза мања.

Две наизменичне величине различите природе могу се поредити по фази и фреквенцији. Мерило фазног односа две неизменичне величине јесте разлика њихових фаза или **фазна разлика**. Нека су две наизменичне емс исте фреквенције f (имају исте кружне фреквенције ω) дате изразима:

$$e = E_{im} \sin(\omega t + \theta_1) \quad \text{и} \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \theta_2),$$

фазна разлика између прве и друге је:

$$\theta_{12} = (\omega t + \theta_1) - (\omega t + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2. \quad (5.17)$$

Када су фреквенције наизменичних величина једнаке, онда је њихова фазна разлика константна и једнака разлици њихових почетних фаза. Позитивна фазна разлика (једначина 5.17) значи да прва емс фазно предњачи другој, односно друга фазно заостаје за првом. Негативна фазна разлика значи да прва емс фазно заостаје за другом, односно друга фазно пред-

њачи првој. Наравно, може се одредити и фазна разлика између друге и прве емс, која би износила:

$$\theta_{21} = (\omega t + \theta_2) - (\omega t + \theta_1) = \theta_2 - \theta_1 = -\theta_{12}. \quad (5.18)$$

Ова фазна разлика има исту апсолутну вредност као и θ_{12} само јој је супротан знак. Због тога када треба назначити фазну разлику две наизменичне величине мора се назначити редослед поређења величина.

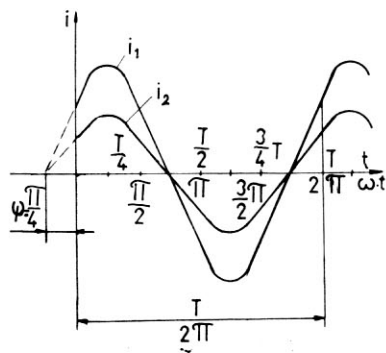
За фазну разлику између напона и струје исте фреквенције усвојен је симбол ϕ (фи):

$$\phi = \theta_u - \psi. \quad (5.19)$$

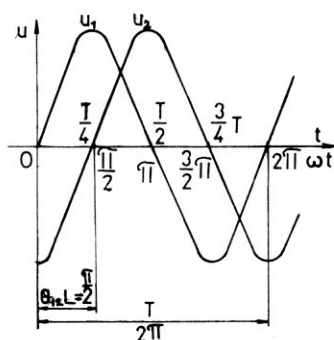
Ако фазна разлика две наизменичне величине износи $\pm \pi$ радијана (или ± 180 степени), онда се за те величине каже да су у противфази. То значи да обе величине истовремено постижу своје амплитуде, али је једна позитивна, а друга негативна.

На слици 5.9 а, б, в, г приказани су следећи таласни облици:

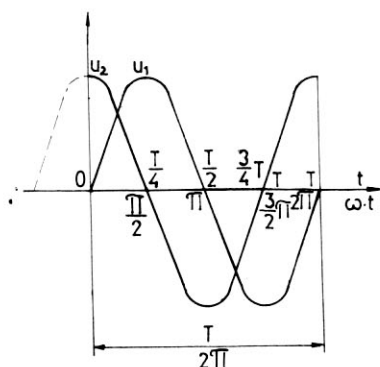
- а) двеју струја једнаких фаза;
- б) двају напона који нису у фази (u_2 фазно заостаје за u_1);
- в) двају напона који нису у фази (u_2 фазно предњачи u_1);
- г) струје и напона који су у противфази.



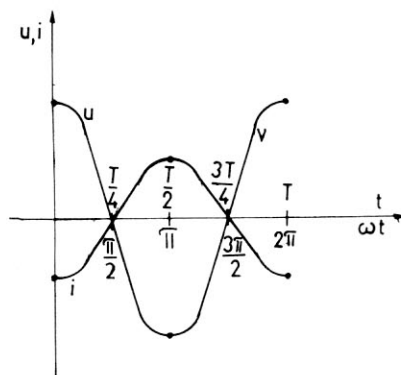
Сл. 5.9а



Сл. 5.9б



Сл. 5.9в



Сл. 5.9г

ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

1. Како смо поделили струје у погледу зависности њиховог интензитета и смера од времена?
2. Шта су параметри наизменичних величина?
3. Шта је фаза, а шта почетна фаза простих периодичних наизменичних величине?
4. Шта је ефективна вредност, а шта средња вредност наизменичне струје.
5. Тренутна вредност наизменичног напона је: $u = 10 \sin(3140t + \pi)$ (V).
Одреди: амплитуду, ефективну вредност, средњу вредност, кружну фреквенцију, фреквенцију, период, фазу и почетну фазу тог напона. Нацртајте таласни облик тог напона и одреди његову тренутну вредност за тренутак $t = T/8$.
6. Тренутна вредност наизменичне струје је $i = 3 \sin(628t + \pi/3)$ (A), а емс $e = 60 \sin(628t - \pi/6)$ (V).
Одреди све параметре датих величина и нађи фазну разлику између: струје и емс; емс и струје. Нацртајте таласне облике струје и емс.

5.3. ПРЕДСТАВЉАЊЕ НАИЗМЕНИЧНИХ ВЕЛИЧИНА

Проучавајући наизменичне струје научили смо и да их представимо на два начина који у потпуности одређују наизменичну величину:

- аналитички — математичком једначином којом је тачно одређена промена наизменичне величине са временом, нпр.

$$e = E_m \sin(\omega t + \theta);$$

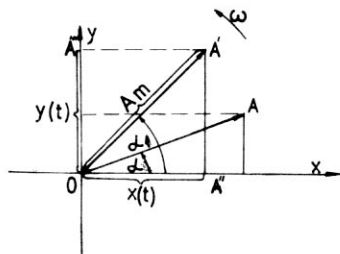
- графички — цртајући таласни облик наизменичне величине.

Ради једноставније анализе електричних кола наизменичне величине могу се још адекватно представити помоћу:

- фазора,
- комплексних бројева.

5.3.1. ПРЕДСТАВЉАЊЕ НАИЗМЕНИЧНИХ ВЕЛИЧИНА ПОМОЋУ ФАЗОРА

Нека се у равни одређеној координатним системом xOy налази вектор $\vec{OA}$ чији је почетак у координатном почетку и који са x -осом заклапа угао α (слика 5.10).



Сл. 5.10.

Нека из тога положаја у тренутку $t=0$ вектор $\vec{OA}$ почне да ротира око свог утврђеног почетка угаоном брзином ω у смеру супротном кретању казаљке на сату (што је усвојено за позитиван смер рачунања углова). Угао α између x -осе и вектора $\vec{OA}$ се у том случају мења са временом, па је за сваки тренутак времена t :

$$\alpha_1 = \omega t + \alpha. \quad (5.20)$$

Ако са A_m означимо дужину (модуо) вектора $\vec{OA}$, а са $x(t)$ његову пројекцију на x -осу и $y(t)$ његову пројекцију на y -осу, онда ће се обе пројекције мењати са временом по закону:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.21)$$

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha). \quad (5.22)$$

Из једначина 5.21 и 5.22 види се да су обе пројекције вектора $\vec{OA}$ простопериодичне функције времена као и наизменичне величине.

Овако дефинисан вектор $\vec{OA}$ назива се векторским представником наизменичне величине $a(t)$, јер је пројекција овог вектора на у-осу у сваком тренутку t једнака посматраној наизменичној величини која је синусна функција времена ако је:

- угаона брзина ротирања вектора $\vec{OA}$ једнака кружној фреквенцији ω посматране наизменичне величине,
- модуо вектора $\vec{OA}$ A_m једнак амплитуди наизменичне величине,
- угао α_1 (аргумент вектора $\vec{OA}$) једнак фази наизменичне величине.

Векторски представник наизменичне величине назива се **обртни фазор**, јер он у суштини не приказује векторску величину (као што је сила, брзина итд.), већ омогућава графичко приказивање наизменичних величина, као што су струја, напон или емс, које су по природи скаларне величине.

Обртни фазор $\vec{OA}$ обележава се симболом:

$$\vec{OA} = A_m \mid \omega t + \alpha = \underline{A}_m. \quad (5.23)$$

Дакле, описан је модулом амплитуде и фазом посматране наизменичне величине.

На слици 5.10, х-оса, тј. оса од које се рачуна фаза назива се **фазна оса**.

Пошто је у анализи кола наизменичне струје довољно познавати само амплитуду (односно ефективну вредност) и почетну фазу, довољно је посматрати фазор у тренутку $t=0$, тј. посматрати тзв. „**заустављен**” фазор, краће, **фазор**:

$$\underline{A} = A \mid \alpha, \quad (5.24)$$

где је A ефективна вредност (у пракси се обично ради са ефективним вредностима) посматране наизменичне величине, а α њена почетна фаза.

Фазори су веома погодни за представљање различитих наизменичних величина, које имају исту фреквенцију, на једном дијаграму. Такав дијаграм, који представља скуп заустављених обртних вектора чији је међусобни положај одређен почетним фазама рачунатим у односу на фазну осу, назива се фазорски дијаграм. Фазорски дијаграм се црта тако што се прво одабере фазна оса (уобичајено, то је х-оса), па посматране наизменичне величине учртају у дијаграм према једначини 5.24.

5.3.2. ПРЕДСТАВЉАЊЕ НАИЗМИНИЧНИХ ВЕЛИЧИНА У КОМПЛЕКСНОМ ОБЛИКУ

Један савршенији начин представљања простопериодичних наизменичних величина јесте њихово такозвано комплексно представљање помоћу комплексних бројева.

Појам комплексног броја

Једначина $Z^2 = -1$ нема решења у домену реалних бројева. Може се, међутим, дефинисати нова врста бројева за коју је то у важности. Ако ставимо

да је $Z = \sqrt{-1}$, тада множењем тог броја самим собом, дакле, број $Z^2 = -1$, даје полазни резултат: $Z^2 = -1$. Овакав „број“, $\sqrt{-1}$, односно у општем случају $\sqrt{-A}$, где је A позитиван реалан број, није реалан и назива се **имагинаран број**. Вредност $\sqrt{-1}$ јесте имагинарна јединица и обележава се словом „ i “ (у математици) или „ j “. У електротехници је уобичајена ознака „ j “ за имагинарну јединицу, с обзиром на то да је словом „ i “ означен интензитет електричне струје. Значи, ми ћемо користити ознаку: $j = \sqrt{-1}$. Према дефиницији имагинарне јединице следи да су у важности следеће једнакости:

$$j \cdot j = j^2 = -1; \quad j^3 = j^2 \cdot j = -j; \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1; \quad j^5 = j^4 \cdot j = j; \quad j^6 = j^5 \cdot j = -1 \text{ итд.}$$

Увођењем имагинарне јединице омогућено је обављање операције кореновања над негативним бројевима. На пример, за број $y = -9$ квадратни корен је, у скупу имагинарних бројева, нови број Z који износи:

$$Z = \sqrt{y} = \sqrt{-9} = j3 \quad (\text{чита се „јот три“}),$$

јер је:

$$Z^2 = Z \cdot Z = (j3) \cdot (j3) = j^2 9 = -9.$$

Приметимо, међутим, да би и број $W = -j3$ био, такође, једнак корену из датог броја y :

$$W = \sqrt{y} = \sqrt{-9} = -j3$$

јер је:

$$W^2 = (-j3)(-j3) = j^2 9 = -9.$$

Имагинарна јединица омогућава и решавање квадратне једначине:

$$f(Z) = Z^2 + aZ + b = 0$$

у општем случају, за произвољне вредности коефицијената „ a “ и „ b “. Знамо да су решења горње једначине у облику:

$$Z_{1/2} = -a/2 \pm \sqrt{(a/2)^2 - b}$$

У скупу реалних бројева решење је дефинисано само ако је поткорена величина (дискриминанта) позитивна или једнака нули, тј. ако је испуњено:

$$(a/2)^2 \geq b.$$

Увођењем имагинарне јединице решење се може тражити и у случају када је дискриминанта негативна, али је решење сада у виду збира реалног и имагинарног броја. Посматрајмо, на пример, једначину облика:

$$f(Z) = Z^2 + 4Z + 13 = 0.$$

Решења су:

$$Z_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm j3 = \begin{cases} -2 + j3 \\ -2 - j3 \end{cases}.$$

Овакав збир реалног и имагинарног броја не значи ништа, уколико не уведемо неке нове дефиниције. Дефинише се појам **комплексног броја** $\underline{Z}$, који је у општем случају, облика:

$$\underline{Z} = x + jy, \quad (5.25)$$

где су, појединачно гледано, x и y реални бројеви, док је производ jy имагинаран. Комплексне бројеве ћемо означавати са цртом испод слова, како бисмо те бројеве разликовали од реалних.

Реална вредност x назива се реалан део комплексног броја $\underline{Z}$, док вредност y , уз имагинарну јединицу, јесте имагинарни део комплексног броја $\underline{Z}$. Реални и имагинарни део комплексног броја имају алгебарско значење: могу бити позитивни, негативни или су вредности нула.

Комплексан број $\underline{W} = u + jv$, који има исти реалан део као број $\underline{Z}$, и имагинарни део који је исте вредности, али супротног знака:

$$u = x, \quad v = -y,$$

односно:

$$\underline{W} = x - jy$$

јесте **коњуговано** комплексан број комплексном броју $\underline{Z}$ и означава се звездом десно изнад слова:

$$\underline{W} = \underline{Z}^* = x - jy. \quad (5.26)$$

Комплексни бројеви могу се сабирати, одузимати, множити, делити и графички приказати у комплексној равни, што ћемо показати на примерима.

Сабирање комплексних бројева врши се тако што се саберу реални бројеви са реалним, а имагинарни са имагинарним.

Пример: сабрати комплексне бројеве $\underline{Z}_1 = 2 + j6$ и $\underline{Z}_2 = 5 - j8$:

$$\underline{Z} = 2 + j6 + 5 - j8 = (2 + 5) + j(6 - 8) = 7 - j2.$$

Збир комплексног броја $\underline{Z}$ и њему коњуговано комплексног броја $\underline{Z}^*$ је реалан број и једнак је двострукој реалној једног од њих:

$$\underline{Z} + \underline{Z}^* = (x + jy) + (x - jy) = 2x.$$

Пример

$$\underline{Z} = 7 - j2, \text{ па је } \underline{Z}^* = 7 + j2, \text{ и } \underline{Z} + \underline{Z}^* = 14.$$

Одузимање комплексних бројева врши се тако што реалне бројеве одузмемо од реалних, а имагинарне од имагинарних.

Пример: од комплексног броја $\underline{Z}_3 = -1 + j8$ одузети $\underline{Z}_4 = 3 - j6$:

$$\underline{Z}_5 = -1 + j8 - (3 - j6) = -1 + j8 - 3 + j6 = (-1 - 3) + j(8 + 6) = -4 + j14.$$

Разлика комплексног броја $\underline{Z}$ и њему коњуговано комплексног броја $\underline{Z}^*$ је чисто имагинаран број:

$$\underline{Z} - \underline{Z}^* = (x + jy) - (x - jy) = j2y.$$

Пример

$$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 7 - j2 - (7 + j2) = -j4.$$

Множење комплексних бројева врши се тако што сваки члан množимо са сваким. Помножити $\underline{Z} = 7 - j2$ и $\underline{Z}_5 = -4 + j14$:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_6 &= (7 - j2) \cdot (-4 + j14) = 7 \cdot (-4) + (7 \cdot j14) + (-j2 \cdot (-4)) + (-j2 \cdot j14) = \\ &= -28 + j98 + j8 + 28 = j106 \quad \text{јер је} \quad j^2 = -1.\end{aligned}$$

Производ бројева $\underline{Z}$ и $\underline{Z}^*$ је реалан број и једнак збиру квадрата реалног и имагинарног дела:

$$\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 - jxy + jxy + y^2 = x^2 + y^2. \quad (5.27)$$

Дељење комплексним бројем врши се тако што прво и бројилац и именилац помножимо коњуговано комплексним бројем имениоца — именилац је сада реалан број, а даље рачунске операције вршимо како је већ описано.

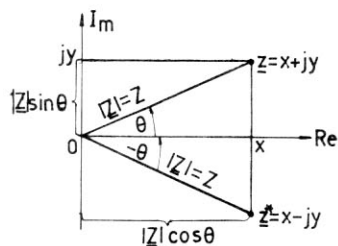
Пример: поделити број један (1) комплексним бројем $\underline{Z}_7 = 10 + j10$:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_8 &= 1/(10 + j10) = 1 \cdot (10 - j10)/(10 + j10) \cdot (10 - j10) = \\ &= (10 - j10)/(100 + 100) = (10 - j10)/200 = 10/200 - j10/200 = 0,05 - j0,05.\end{aligned}$$

Једначином 5.25 представљен је комплексан број $\underline{Z}$ у **алгебарском** облику.

Сваки комплексан број можемо графички представити у комплексној равни једном тачком.

Вертикална оса комплексне равни назива се имагинарна оса (*Im*-оса), а хоризонтална оса је реална (*Re*) оса. Обе осе имају стандардан позитиван (+) и негативан (−) смер. На слици 5.11 приказани су у комплексној равни комплексан број $\underline{Z}$ као тачка са координатама (x, jy) и његов коњуговано комплексан број $\underline{Z}^*$ као тачка са координатама ($x, -jy$).



Сл. 5.11

Модуо комплексног броја $\underline{Z}$ је дужина дужи која спаја тачку (x, jy) и координатни почетак (слика 5.11). Модуо комплексног броја $\underline{Z}$ означава се са $|\underline{Z}| = Z$. Угао између реалне осе и модула комплексног броја (на слици 5.11 означен са θ) назива се **аргумент** комплексног броја. Модуо комплексног броја израчунава се применом Питагорине теореме на правоугли троугао (слика 5.11), па је

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5.28)$$

а аргумент θ израчунавамо као:

$$\operatorname{tg} \theta = y/x. \quad ((5.29)$$

Коњуговано комплексан број $\underline{Z}^*$ има исти модуо као и комплексан број $\underline{Z}$, а аргументи су им једнаки по величини, али су супротног предзнака. Како је (слика 5.11):

$$x = Z \cos \theta \quad (5.30)$$

$$y = Z \sin \theta, \quad (5.31)$$

то комплексан број Z можемо представити и у **тригонометријском** облику:

$$\underline{Z} = x + jy = \underline{Z} \cos \theta + j \underline{Z} \sin \theta = \underline{Z} (\cos \theta + j \sin \theta). \quad (5.32)$$

Комплексан број $\underline{Z}$ можемо представити и у **експоненцијалном** облику:

$$\underline{Z} = Z e^{j\theta}, \quad (5.33)$$

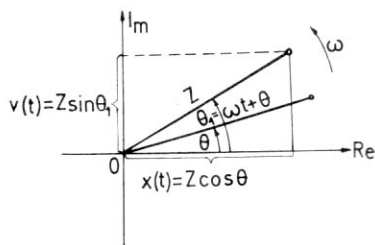
где је: e — основа природног логаритма ($e \approx 2,71$), а $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ представља Ојлеров образац (*Leonard Euler*, 1707–1783, швајцарски математичар, физичар и астроном), образац чије тумачење нећемо разматрати у овом убенику.

Примена комплексних бројева у теорији наизменичних струја

Примена фазорских дијаграма за графичку анализу кола са наизменичним струјама, без обзира на једноставност и прегледност, не даје увек довољну тачност при прорачунима. Представљање наизменичних величина помоћу комплексних бројева (комплексна метода) удружује једноставност фазорских дијаграма са могућношћу да прорачуне вршимо са задатим степеном тачности. Комплексна метода заснива се на чињеници да свакој тачки у комплексној равни можемо једнозначно придружити вектор чији је почетак у координатном почетку, а врх у тачки која дефинише комплексан број $\underline{Z}$. Смер вектора је од координатног почетка ка посматраној тачки. Дужина вектора једнака је модулу комплексног броја $\underline{Z}$, а угао θ који овако дефинисан вектор заклапа са реалном осом једнак је аргументу комплексног броја. Ако је дужина вектора, па према томе и модуло комплексног броја, једнака амплитуди посматране простопериодичне наизменичне величине, а угао θ , па према томе и аргумент комплексног броја, једнак почетној фази посматране наизменичне величине, онда овако дефинисан вектор одговара фазору, а комплексан број $\underline{Z}$ јесте комплексни представник посматране наизменичне величине у тренутку $t=0$.

Нека тачка, која овако дефинише комплексан број, ротира у комплексној равни око координатног почетка константном угаоном брзином ω која је једнака кружној фреквенцији посматране наизменичне величине (слика 5.12). Аргумент комплексног броја $\underline{Z}$ мењаће се у сваком тренутку времена t по закону $\omega t + \theta$. Имагинарни и реални део комплексног броја мењаће се по синусном, односно косинусном закону са временом:

$$y = Z \sin(\omega t + \theta) \quad (5.34)$$



Сл. 5.12

Имагинарни део комплексног броја одређен једначином 5.34 представља тренутну вредност синусне наизменичне величине у.

Тако, на пример, ако је тренутна вредност наизменичног напона:

$$u = 20 \sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4) \quad (V).$$

Амплитуда овог напона је $U_m = 20 \sqrt{2}$ (V), а почетна фаза $\theta_u = \pi/4$.

Комплексна амплитуда овог напона је:

$$\underline{U}_m = 20 \sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4} \text{ (V)} \quad (5.36)$$

или

$$\underline{U}_m = 20 \sqrt{2} (\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = 20 \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 20 + j20 \text{ (V)} \quad (5.37)$$

Комплексна ефективна вредност напона је:

$$\underline{U} = 20 e^{j\pi/4} = 20 (\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = 10 \sqrt{2} + j 10 \sqrt{2} \text{ (V)} \quad (5.38)$$

Комплексна тренутна вредност напона је:

$$\underline{U} = U_m e^{j(\omega t + \pi/4)} = 20 \sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t + \pi/4)} \text{ (V)}. \quad (5.39)$$

Задатак за самостално решавање нека буде обрнут: дата је комплексна ефективна вредност напона $\underline{U} = 10 \sqrt{2} + j 10 \sqrt{2}$ (V). Потребно је наћи: комплексну амплитуду, комплексну тренутну вредност, амплитуду и тренутну вредност (u) овог напона.

Треба напоменути да је представљање наизменичних величина комплексним бројем само математички формализам којим избегавамо гломазна рачунања тригонометријским функцијама. Никако не треба повезивати физичку суштину неке величине са њеним комплексним представљањем.

5.3.3. САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ НАИЗМЕНИЧНИХ ВЕЛИЧИНА

У колима наизменичне струје врши се сабирање и одузимање наизменичних величина исте природе. Тако је при редној вези пријемника тренутна вредност резултујућег напона једнака збиру тренутних вредности напона на појединим деловима кола, док је при паралелној вези пријемника тренутна вредност укупне струје једнака збиру тренутних вредности струја у гранама.

Збир две наизменичне синусне величине једнаке фреквенције такође је синусна величина исте фреквенције, чија је вредност у сваком тренутку једнака збиру тренутних вредности сабирака.

Нека су дате две струје:

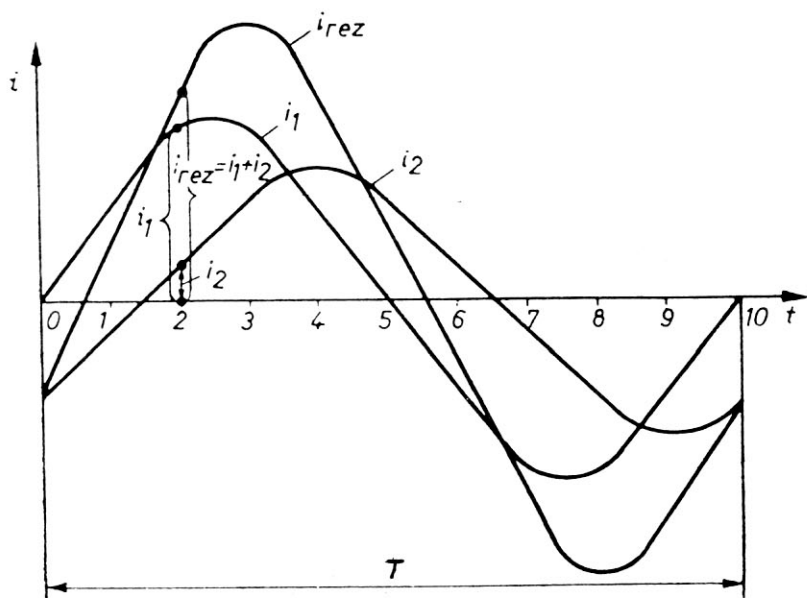
$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) \quad \text{и} \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Збир ове две струје јесте резултујућа струја, а можемо је наћи на више начина:
— аналитичким путем сабирајући њихове тренутне вредности:

$$i_{\text{rez}} = i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) = I_{\text{rezm}} \sin(\omega t + \psi).$$

Проблем решавамо применом адиционих теорема, познатих из математике. Израчунавамо I_{rezm} и почетну фазу ψ , што је често гломазан посао;

- Резултујућу струју можемо одредити и графички сабирањем таласних облика појединачних струја као на слици 5.13. Да бисмо добили



Сл. 5.13.

- тачан резултат, периоду треба поделити на што више делова (десет или више делова), и у свакој добијеној тачки конструисати ординату i_{rez} као збир ордината i_1 и i_2 ;
- обе струје можемо представити фазорима, према заједничкој фазној оси и нацртати њихов фазорски дијаграм. Сада треба применити правила о геометријском сабирању вектора позната из математике. Збир два вектора одређује се као дијагонала паралелограма конструисаног над векторима који се сабирају, а који служе као стране. Проблем се своди на одређивање треће стране троугла, с тим што су друге две дате по величини и смеру. Дужина треће стране, тј. резултујућег фазора, јесте амплитуда (или ефективна вредност, зависи како смо представили фазоре) резултујуће струје, а угао који он заклапа са фазном осом је почетна фаза резултујуће струје. При сабирању више од две наизменичне величине, корисније је цртати фазорски дијаграм тако да се на крај првог фазора нанесе почетак другог фазора, на крај другог — почетак трећег итд. Фазор који спаја почетак првог фазора с крајем последњег представља фазор резултујуће наизменичне величине једнаке збиру свих осталих;
- обе струје могу се представити у комплексном облику, комплексним ефективним вредностима или комплексним амплитудама и сабрати по правилу о сабирању комплексних бројева. Модуло резултујућег комплексног броја биће ефективна (или максимална, зависно од облика представљања комплексним бројем) вредност резултујуће струје, а његов аргумент почетна фаза резултујуће струје.

Одузимање наизменичних величина увек се може заменити сабирањем тако што величини коју одузимамо заменимо знак:

$$i_{\text{rez}} = i_1 - i_2 = i_1 + (-i_2). \quad (5.40)$$

ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

1. Шта је фазор?
2. Шта је фазорски дијаграм?
3. Дате су две наизменичне синусне вредности:

$$i_1 = 3\sqrt{2} \sin \omega t \text{ (A)} \text{ и } i_2 = 4\sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (A)},$$

- представити их у облику фазора,
 - нацртати фазорски дијаграм,
 - саборити их фазорски,
 - наћи синусну вредност резултантне синусне,
 - нацртати њихове таласне облике.
4. Шта је комплексан број?
 5. $Z = 5 - j5$. За дати комплексан број наћи могуће комплексне бројеве, његов аргумент, нацртати га у комплексној равни, наћи тригонометријски и експоненцијални облик тог броја.
 6. Трећи задатак решити комплексним рачуном.

6. Елементи у колима наизменичне струје

У овом поглављу анализираћемо појаве које се јављају када се отпорник, калем и кондензатор прикључе на простопериодичан наизменичан напон, тј. на идеалан напонски генератор чија је емс једнака том напону.

Сматраћемо да су сва три елемента линеарна, тј. да су њихови параметри константни: не зависе од напона на њиховим крајевима, као ни од струја које су успостављене, а такође да не зависе ни од фреквенције, ни од времена. Даље ћемо претпоставити да се отпорник добро описује само отпорношћу, калем само индуктивношћу, а кондензатор само капацитивношћу. Дакле, реч је о „чистом“ отпорнику, калему и кондензатору, тј. реч је о идеализованим, каже се и „савршеним“, представницима реалних (физички остварљивих) елемената.

6.1. ОТПОРНИК У КОЛУ НАИЗМЕНИЧНЕ СТРУЈЕ

Коло на слици 6.1 састоји се од отпорника отпорности R на чије крајеве је прикључен простопериодичан наизменичан напон:

$$u = U_m \sin \omega t \quad \theta_u = 0. \quad (6.1)$$

Ако су референтни смерови за напон и струју усаглашени (као на слици 6.1), тада је струја у сваком тренутку дата познатом релацијом $i = \frac{u}{R}$, која ће у овом случају имати облик:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t, \quad (6.2)$$

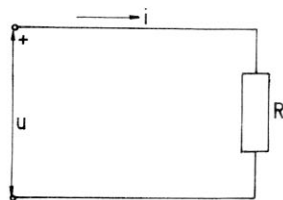
где је:

$$I_m = \frac{U_m}{R} \text{ амплитуда струје у колу.} \quad (6.3)$$

Сличан резултат би се добио у случају да је у отпорнику успостављена простопериодична наизменична струја $i = I_m \sin \omega t$, напон на крајевима отпорника је $u = Ri$.

Упоређивањем математичког израза струје и напона долазимо до закључка да су њихове фазе једнаке, тј. да је фазна разлика напона и струје једнака нули. Исти резултат се, очигледно, добија и у случају када почетна фаза напона није једнака нули: $u = U_m \sin (\omega t + \theta_u)$. Струја је сада једнака:

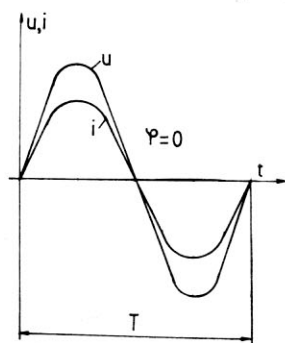
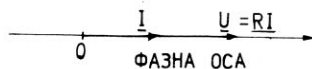
$$i = \frac{U_m}{R} \sin (\omega t + \theta_u).$$



Сл. 6.1

Дакле, почетна фаза струје коју смо означили са ψ једнака је почетној фази напона: $\psi = \theta_u$.

Физичка суштина непостојања фазног помераја је у томе што се електрична енергија на отпорнику стално претвара у топлотну. У тренутку када је напон генератора једнак нули и струја је једнака нули; кад напон достигне највећу вредност, струја је у колу највећа; када се мења смер напона генератора, у исто време се мења и смер струје у колу.



Сл. 6.2

На слици 6.2 дати су таласни облици и фазорски дијаграм напона и струје у колу.

Омов закон за ефективне вредности напона и струје изражавамо аналогно Омовом закону за кола једносмерне струје. Дељењем са обе стране једначину 6.3 са $\sqrt{2}$ добијамо:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (6.4)$$

Пошто су напон и струја у фази, фазор струје I добијемо тако што фазор напона U поделимо са отпорношћу R :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U \angle 0}{R} = \underline{I} \angle 0. \quad (6.5)$$

Једначина 6.5 представља Омов закон у фазорском облику за ефективне вредности напона и струје. Комплексна ефективна вредност напона је: $\underline{U} = U e^{j0} = U e^{j0}$, па Омов закон за комплексне ефективне вредности гласи:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U e^{j0}}{R} = \frac{U e^{j0}}{R} = I e^{j0}, \quad (6.6)$$

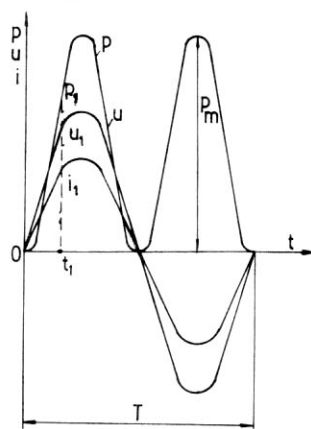
односно $U = RI$.

Тренутну снагу у колу са отпорником добијемо као производ тренутних вредности напона и струје:

$$p = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2\omega t^{1)}. \quad (6.7)$$

Таласни облик тренутне вредности снаге p дат је на слици 6.3. У тренуцима када су струја и напон једнаки нули, енергија не доспева у коло и тренутна вредност снаге је нула. Када струја и напон, имају максималне вредности, и снага је максимална: $P_m = U_m I_m$.

У другој полупериоди прикључени напон мења смер. Истовремено мења смер и струја, али смер протока енергије остаје исти, тј. енергија из генератора доспева у пријемник. Тренутна снага је опет позитивна. У колима са активном отпорношћу



Сл. 6.3

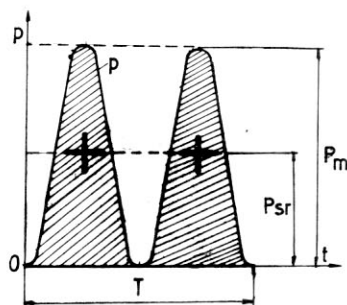
¹⁾ Из тригонометрије је позната идентичност: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

електрична енергија из генератора доспева у пријемник фреквенцијом дво-
струко већом од фреквенције прикљученог напона. Сва електрична енер-
гија се у отпорнику претвара у топлоту, тј. у колу постоји иреверзи-
билни (неповратни) процес (електрична енергија у овом процесу може
да се претвара и у неки други вид енергије: механичку, хемијску, светлосну
енергију). У таквом процесу нема размене енергије између генератора и
пријемника.

Одредимо колика је средња вредност снаге у току периода T напона или
струје. Са таласног облика на слици 6.3 и из једначине 6.7 видимо да се
тренуна вредност снаге мења од $p=0$ до $p=P$. Како је $\cos 2\omega t$ простопериодич-
на функција времена, њена средња вредност за време T је једнака нули, па је
из једначине 6.7 средња снага P_{sr} у колу за време T :

$$P_{sr} = \frac{P_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = UI = P. \quad (6.8)$$

Средња или **активна** снага P за време T једнака је производу ефективних вредности на-
пона на отпорнику и успостављене струје у колу. Активна снага је врло важна величина у
практичној примени, где фигурише као један од централних параметара. Јединица за мерење
активне снаге у СИ систему је ват (W). На слици 6.4 графички је приказана тренутна, максимал-
на и средња снага. Шрафирана површина огра-
ничена кривом p и временском осом представља, у одговарајућој размери,
количину енергије која се у току једне периоде T простира из генератора ка
пријемнику.



Сл. 6.4

Према томе, у колу са савршеним отпорником успостављена струја је у
фази са напонам, у пријемнику се електрична енергија претвара у топлотну
или у друге видове енергије, а размена енергије између генератора и пријемни-
ка не постоји.

ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

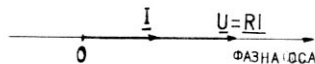
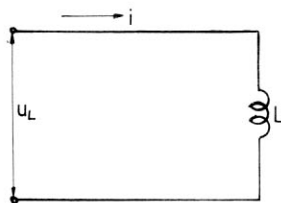
1. Колика је фазна разлика између напона и струје у колу са отпорником?
2. Шта је активна снага пријемника?
3. Тренутна вредност струје у колу са отпорником је $i = 0,4\sqrt{2} \sin 3140t$ (A). Отпорност пријемника је $R = 40\Omega$. Израчунајте: U , U_m , P , фреквенцију тренутне снаге и највишу тренутну вредност напона.
4. Напон на прикључцима пријемника је $\underline{U} = 20 - j20$ (V), а његова отпорност је $R = 20\Omega$. Нацртајте фазорски дијаграм, највише тренутне вредности напона и струје и одредите активну снагу P .

6.2. КАЛЕМ У КОЛУ НАИЗМЕНИЧНЕ СТРУЈЕ

Калем индуктивности L прикључен је на наизменичан напон тренутне
вредности u_L и кружне фреквенције ω као на слици 6.5.

Нека је под дејством овог напона у калему успостављена наизменична струја, чији се референтни смер поклапа са референтним смером напона, и која има тренутну вредност:

$$i = I_m \sin \omega t.$$



Сл. 6.5

Услед променљиве струје у калему ће се мењати магнетни флуks по истом закону, јер је како нам је већ познато из поглавља о електромагнетизму:

$$\Phi = Li = LI_m \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t \quad (6.9)$$

где је $\Phi_m = LI_m$.

Флуks, променљив са временом, изазваће појаву самоиндукције, а емс самоиндукције e_L , према Ленцовом и Фарадејевом закону, у сваком тренутку биће одређена једначином:

$$e_L = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - L \frac{\Delta i}{\Delta t}.$$

Емс самоиндукције постиже своју максималну вредност када брзина промене интензитета флуksа има највећу вредност (видети слику 5.3 и релацију 5.4). Како је $\Phi = Li$, емс самоиндукције ће имати највећу вредност када је брзина промене струје највећа. Највећа брзина промене интензитета струје је у тренуцима када струја пролази кроз нулту вредност, па ће амплитуде емс самоиндукције одговарати по времену нултим вредностима струје и обрнуто, тј. у моментима када је струја максимална емс самоиндукције ће имати нулте вредности.

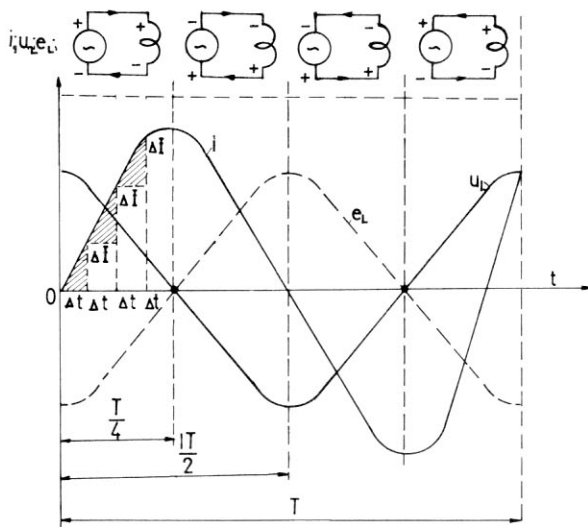
Узимајући у обзир да за време четвртине периоде када је струја у позитивној полупериоди и расте, емс самоиндукције мора да има смер супротан смеру струје, а да у току четвртине периоде када одржава опадајућу струју мора да има исти смер као и струја, можемо нацртати таласни облик емс самоиндукције. На слици 6.6 види се да промене емс самоиндукције касне за одговарајућим променама струје за четвртину периоде, односно за угао $\frac{\pi}{2}$.

Према томе, ако је у калему успостављена наизменична струја синусоидалног облика са почетном фазом једнаком нула, онда је тренутна вредност емс самоиндукције у калему одређена релацијом:

$$e_L = E_{Lm} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.10)$$

С обзиром на једначине 6.9 и 6.10, види се да је вредност емс самоиндукције пропорционална брзини промене струје. То значи да је пропорционална

и фреквенцији струје, јер уколико је фреквенција струје већа, утолико је већа брзина њене промене у току времена. То смо већ закључили у случају обртања контуре у хомогеном магнетном пољу.



Сл. 6.6

Истовремено из истих једначина види се да емс самоиндукције зависи и од индуктивности калема. Уколико је већа индуктивност калема, утолико је уз остале једнаке услове емс самоиндукције веће амплитуде. У складу са тим амплитуду емс и њену ефективну вредност одређујемо према једначинама:

$$E_{Lm} = \omega L I_m, \quad \text{односно} \quad E_L = \omega L I. \quad (6.11)$$

Други Кирхофов закон примењен на посматрано коло гласи:

$$e_L + u_L = 0, \quad \text{односно} \quad u_L = -e_L. \quad (6.12)$$

Сада ћемо одредити тренутну вредност наизменичног напона u_L на крајевима калема:

$$u_L = -\omega L I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.13)$$

Из тригонометрије је познато да је

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x;$$

$$2\sin x \cos x = \sin 2x,$$

где је $x = \omega t$.

С обзиром на адиционе теореме, то се може писати и као:

$$u_L = \omega L I_m \cos \omega t.$$

Из једначина 6.11 и 6.12 видимо да емс самоиндукције и напон на калему имају једнаке максималне, односно ефективне вредности. Формирајмо фазну разлику између напона и емс, односно напона и струје:

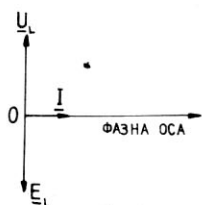
$$\theta_{ue} = \theta_u - \theta_e = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2} \right) = \pi \quad (6.14)$$

$$\varphi = \theta_u - \psi = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \quad (6.15)$$

Како су обе фазне разлике позитивне, закључујемо да напон на калему фазно предњачи емс самоиндукције за угао π , а струји за угао $\frac{\pi}{2}$ (слика 6.6).

Фазорски дијаграм за то коло дат је на слици 6.7. Аналитички изрази за фазоре дефинисане за ефективне вредности посматраних величина су:

$$\underline{E}_L = E_L \left[-\frac{\pi}{2} \right]; \quad \underline{U}_L = U_L \left[\frac{\pi}{2} \right]; \quad \underline{I} = I \left[0 \right]. \quad (6.16)$$



Сл. 6.7

Амплитуду и ефективну вредност напона на калему одредили смо према једначини 6.13:

$$U_{Lm} = \omega L I_m \quad \text{и} \quad U_L = \omega L I. \quad (6.17)$$

Ефективна вредност напона једнака је производу ефективне вредности струје и величине ωL . Упоређивањем израза 6.17 са изразима 6.3 и 6.4, који дају везу између максималних (ефективних) вредности струје и напона отпорника, закључујемо да је облик израза исти, с тим што уместо отпорности R фигурише члан ωL , који има исту природу као R , дакле природу отпорности. Величина ωL назива се индуктивна отпорност или реактанса калема и обележава се са X_L :

$$X_L = \omega L. \quad (6.18)$$

Мада индуктивна отпорност калема има димензије отпорности и изражава се у омима (Ω), разлика у односу на отпорност отпорника R је велика: ради се о различитим механизмима трансформације енергије у калему и отпорнику.

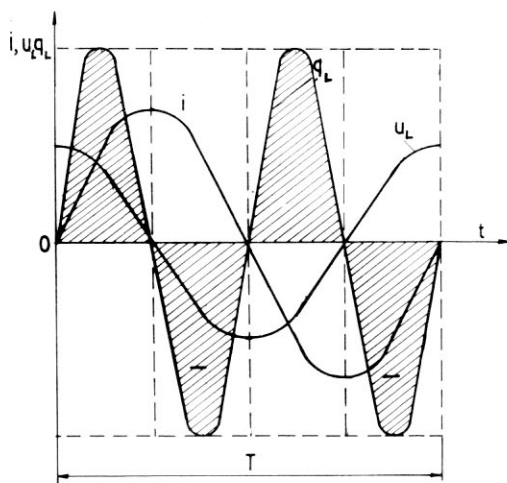
Важно је запазити да индуктивна отпорност зависи од индуктивности калема L и од кружне фреквенције ω . При високим фреквенцијама индуктивна отпорност једног калема може бити врло велика, док при ниским фреквенцијама индуктивна отпорност тог истог калема је врло мала (у граничном случају $\omega=0$ и ова отпорност је нула). Стога калем користимо као елеменат у колу који „пропушта“ струју ниске фреквенције (што укључује и временски константну струју), а „не пропушта“ струју високе фреквенције.

Тренутна снага коју прима калем је:

$$\begin{aligned} q_L &= u_L \cdot i = U_{Lm} \cdot I_m \cdot \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sin 2\omega t = \\ &= U_L I \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Таласни облици струје, напона и снаге калема дати су на слици 6.8.

Снага коју прима калем може бити позитивна, тада калем прима енергију, и негативна, тада калем даје енергију. Фреквенција снаге је два пута већа од фреквенције струје и напона. На слици 6.8 види се да у временским интервалима када су напон и струја истог знака, енергија остат-



Сл. 6.8

ка кола претвара се у калему у магнетску енергију, да би у интервалима када су струја и напон различитог знака, ова магнетска енергија била враћена остатку кола. Према томе, средња снага калема у току једне периоде T једнака је нули, што јасно указује да се у калему не дешавају иреверзибилни процеси.

Шрафиране површине на слици 6.8 у одговарајућој размери представљају енергију коју генератор и калем размењују. Ова размена енергије окарактерисана је као **реактивна** снага калема Q , тј. амплитуда тренутне вредности снаге калема. Према једначини 6.19 реактивну снагу калема израчунавамо као производ ефективних вредности напона на калему и струје успостављене кроз калем:

$$Q_L = U_L I = X_L I^2 = \frac{U_L^2}{X_L}. \quad (6.20)$$

Јединица у СИ систему за реактивну снагу је Var (волт-ампер реактивни). Простопериодичне величине емс самоиндукције, напон и струју представимо у комплексно ефективном облику:

$$\underline{E}_L = E_L e^{-j\pi/2} = E_L \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) = -jE_L, \quad (6.21)$$

$$\underline{U}_L = U_L e^{j\pi/2} = U_L \left(\cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2} \right) = jU_L, \quad (6.22)$$

$$\underline{I} = I e^{j0} = I (\cos 0 + j \sin 0) = I. \quad (6.23)$$

Количник комплексних ефективних вредности напона и струје дефинише величину која се назива комплексна импеданса (или само импеданса) калема. Импедансу калема означаваћемо са $\underline{Z}_L$.

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = \frac{j\omega L \underline{I}}{\underline{I}} = jX_L = j\omega L. \quad (6.24)$$

Израз 6.24 може се писати и у облику:

$$\underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_L},$$

што представља Омов закон за калем у комплексном облику.

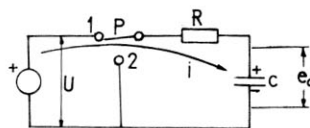
ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

1. Израчунајте индуктивну омијорност калема индуктивности $L = 50 \mu\text{H}$ за фреквенције: $f_1 = 100 \text{ Hz}$, $f_2 = 1 \text{ kHz}$ и $f_3 = 10 \text{ kHz}$. Израчунајте $\underline{Z}_L$.
2. Напон на калему има тренутну вредност $u = 50 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ (V)}$ и $X_L = 50 \Omega$.
Одредите:
– тренутну вредност струје,
– тренутну вредност емс самоиндукције,
– нацртајте фазорски дијаграм,
– напишите комплексне вредности напона, струје, емс,
– колика је реактивна снага,
– нацртајте таласне облике.
3. При којој вредности наизменичне струје емс самоиндукције има највећу вредност?

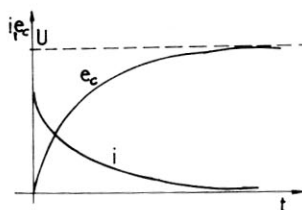
6.3. ПУЊЕЊЕ И ПРАЖЊЕЊЕ КОНДЕНЗАТОРА

Пуњење кондензатора

Приликом прикључења кондензатора на извор електричне енергије константног напона, под дејством разлике потенцијала на прикључцима извора врши се нагомилавање наелектрисања на облогама кондензатора (слика 6.9). То нагомилавање изазвано је усмереним кретањем електрона, тј. у колу је успостављена струја. Нагомилавањем наелектрисања између облога кондензатора постепено се јавља растућа разлика потенцијала, која делује наспрот напону прикљученом на кондензатор и аналогно емс самоиндукције назива се емс кондензатора – e_C .



Сл. 6.9



Сл. 6.10

Према томе, физичка суштина процеса пуњења кондензатора јесте претварање кинетичке енергије електрона у потенцијалну енергију електричног поља кондензатора. Пуњењем кондензатора емс кондензатора се повећава

док се струја пуњења смањује. На крају пуњења кондензатора успоставља се равнотежа између прикљученог напона и емс кондензатора, а струја постаје једнака нули. Од тог тренутка струја у колу кондензатора не постоји, ма колико он дуго остао прикључен на извор. Дијаграм струје и емс кондензатора приказан је на слици 6.10.

Други Кирхофов закон за коло пуњења гласи:

$$U - Ri - e_C = 0, \quad (6.25)$$

где су: U — напон на прикључцима извора, R — отпорност отпорника у колу пуњења кондензатора, i — струја пуњења, а e — емс кондензатора.

Из једначине 6.25 може се одредити интензитет струје пуњења кондензатора:

$$i = \frac{U - e_C}{R}. \quad (6.26)$$

У почетном тренутку $t=0$ емс кондензатора једнака је нули, па је струја највећа, када се заврши пуњење емс кондензатора једнака је напону U , па је струја једнака нули. Треба напоменути да у кондензатору не постоји струја проводности (у виду усмереног кретања наелектрисања), већ струја диелектричног помераја. У извору константног напона и проводницима постоји струја проводности.

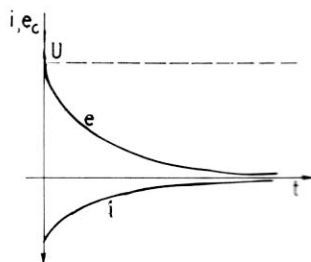
Пражњење кондензатора

Када се преклопник, на слици 6.9, пребаци у положај 2, кондензатор се одваја од извора и образује коло са отпорником R . Под дејством разлике потенцијала између облога кондензатора настаје струја:

$$i = \frac{e_C}{R}. \quad (6.27)$$

У почетном тренутку пребацивања преклопника струја пражњења је највећа. При пражњењу кондензатора потенцијална енергија електростатичког поља претвара се у кинетичку енергију покретних оптерећења, која се опет претвара у топлотну енергију. Емс кондензатора се смањује, а истовремено се смањује и интензитет струје пражњења кондензатора (слика 6.11, струја пражњења има супротан смер од струје пуњења кондензатора).

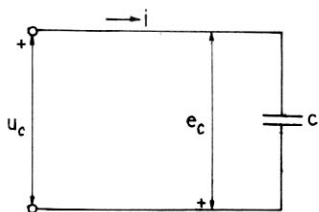
Када емс кондензатора постане једнака нули, и струја пражњења ишчезава и кондензатор је испражњен. У диелектрику се, у току пражњења кондензатора, поново успоставила струја диелектричног помераја, а не постоји струја проводности.



Сл. 6.11

6.4. КОНДЕНЗАТОР У КОЛУ НАИЗМЕНИЧНЕ СТРУЈЕ

Кондензатор капацитивности C прикључен је на простопериодичан наизменичан $u_c = U_{cm} \sin \omega t$, као на слици 6.12.



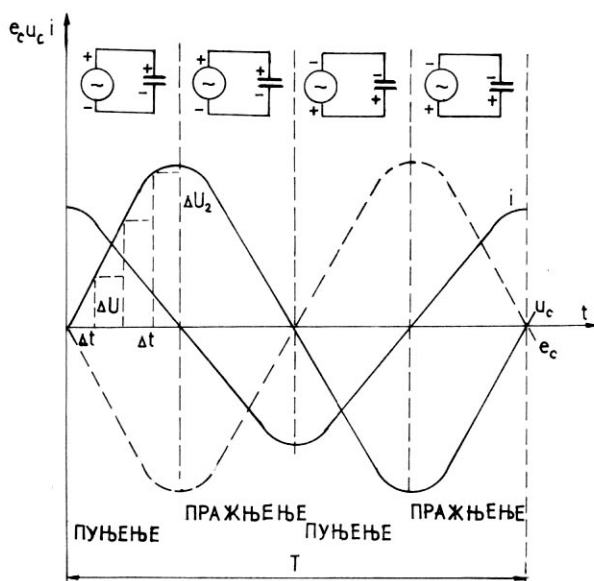
Сл. 6.12

Под дејством овог напона кондензатор се периодично пуни и празни, а у колу је успостављена наизменична струја, која представља струју пуњења и пражњења кондензатора. На слици 6.13 приказани су дијаграми струје и напона за по-сматрано коло.

У првој четвртини периоде T , напон на кондензатору расте од нуле до максимума, кондензатор се пуни, тј. смер струје се поклапа са смером прикљученог напона. Интензитет струје пуњења је пропорционалан брзини промене количине оптерећења, тј. једнак је брзини промене напона:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = -C \frac{\Delta u_c}{\Delta t}, \quad (6.28)$$

пошто је $q = C u$.



Сл. 6.13

Као што се види са дијаграма напон ће имати највећу брзину промене када пролази кроз вредности једнаке нули. У тим тренуцима струја ће постићи своје амплитудне вредности. Напон расте неједнаком брзином. На почетку прве четвртине периоде напон знатно брже расте него на крају. Због тога је струја пуњења за $t=0$ максимална, док је на крају за $t=T/4$, када напон престаје да достиже максимум и престаје да расте, струја пуњења једнака нули.

У другој четвртини периоде, напон прикључен на кондензатор смањује се од максималне вредности до нуле, а кондензатор се празни, тј. смер стру-

је супротан смеру прикљученог напона. Брзина опадања напона на почетку друге четвртине периоде једнака је нули, док је на крају максимална, па се због тога струја пражњења (супротног смера од струје пуњења) постепено повећава од вредности једнаке нули до максимума.

У току треће и четврте четвртине периоде T цео процес се понавља, тј. кондензатор се поново пуни при промени поларитета прикљученог напона, а затим се поново празни итд.

На слици 6.13 види се да струја у колу са кондензатором фазно предњачи прикљученом напону за угао једнак $\pi/2$. Аналитички израз за тренутну вредност струје може се написати са датог дијаграма:

$$i = \omega C U_{Cm} \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \cos \omega t, \quad (6.29)$$

где је:

$$I_m = \omega C U_{Cm} \quad (6.30)$$

максимална вредност струје.

Тренутна вредност струје директно је сразмерна брзини промене прикљученог напона, а промене су веће ако напон има већу фреквенцију и већу амплитуду. Слично је било са напонам калема ако је његова струја простопериодична (видети поглавље 6.2). Како су ове величине параметри прикљученог напона и не мењају се са временом, онда оне одређују амплитуду струје, једначина 6.30. Ефективну вредност струје добијају се дељењем максималне вредности са $\sqrt{2}$, па је:

$$I = \omega C U_C. \quad (6.31)$$

Ако једначину 6.31 упоредимо са Омовим законом, тада видимо да величина ωC има природу проводности. Реципрочна величина величини ωC има природу отпорности и назива се капацитивна отпорност или реактанса кондензатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (6.32)$$

Капацитивна отпорност зависи од капацитивности кондензатора и фреквенције. При високим фреквенцијама капацитивна отпорност једног кондензатора је мала, док је при ниским фреквенцијама велика (за $\omega = 0$ капацитивна отпорност је бесконачно велика), па се кондензатор може користити као елеменат који „пропушта” струју високе фреквенције, а „не пропушта” струју ниских фреквенција.

Аналогно другом Кирхофовом закону за коло са кондензатором важи релација:

$$u_C + e_C = 0;$$

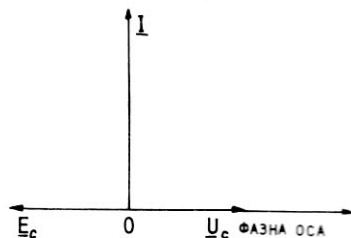
$$e_C = -u_C = U_{Cm} \sin \omega t = U_{Cm} \sin(\omega t + \pi), \quad (6.33)$$

где је e_C емс кондензатора.

Фазори наизменичних величина у датом колу са кондензатором су:

$$\underline{U}_C = U_C \underline{0} \quad \underline{E}_C = E_C \underline{\pi} \quad \underline{I} = I \underline{\pi/2}, \quad (6.34)$$

а фазорски дијаграм је дат на слици 6.14.

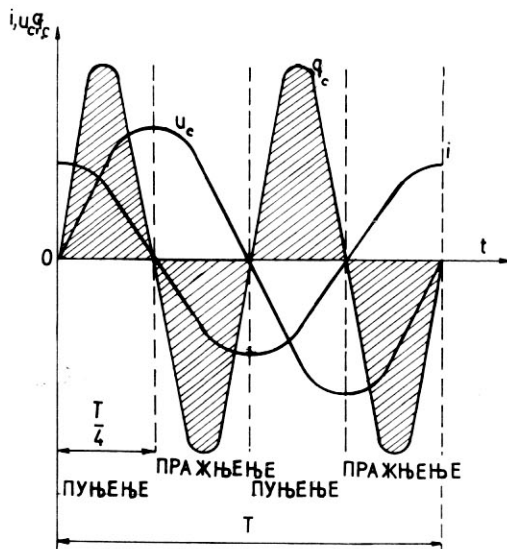


Сл. 6.14

Тренутна снага коју прима кондензатор је:

$$q_C = u_C i = U_{Cm} I_m \sin \omega t \cos \omega t = U_C I \sin 2\omega t. \quad (6.35)$$

Таласни облици снаге, напона и струје дати су на слици 6.15.



Сл. 6.15

Снага може бити позитивна и тада кондензатор прима енергију од спољашњег кола; може бити негативна и тада кондензатор предаје енергију. Фреквенција снаге је два пута већа од фреквенције наизменичног напона и струје кондензатора. Средња снага у току једне периоде T једнака је нули, што показује да се у кондензатору не дешавају иреверзибилни процеси (види слику 6.15 и једначину 6.35.). Шрафиране површине на слици 6.15 у одговарајућој сразмери представљају енергију која се размењује између кондензатора и спољашњег дела кола, тј. која осцилује у колу. Реактивна снага кондензатора је:

$$Q_C = U_C I = X_C I^2 = \frac{U_C^2}{X_C}. \quad (6.36)$$

Реактивна снага представља амплитуду тренутне вредности снаге кондензатора и јединица за реактивну снагу у SI систему је VAr.

Комплексне ефективне вредности за напон, струју и емс кондензатора су:

$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= U_C e^{j0} = U_C \\ \underline{I} &= I e^{j\frac{\pi}{2}} = jI \\ \underline{E}_C &= E_C e^{j\pi} = -E_C. \end{aligned} \quad (6.37)$$

¹⁾ Математичке операције су потпуно исто изведене као у поглављу о Калему у колу наизменичне струје.

Комплексна импеданса кондензатора одређена је количником комплексног напона и комплексне струје кондензатора:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}} = \frac{U_C}{jI} = -j \frac{U_C}{I} = -jX_C. \quad (6.38)$$

Израз 6.38 може се писати и у облику:

$$\underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}, \quad \text{односно} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C},$$

што представља Омов закон за кондензатор у комплексном облику.

ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

1. Колика је фазна разлика између напона u_C и струје i ?
2. Ако је струја кондензатора $i = 5\sqrt{2} \sin \omega t$ (A), а реактанса кондензатора при фреквенцији f износи $X_C = 10 \Omega$, нађиће:
 - ефективну и максималну вредности струје, напона и емс кондензатора,
 - фазоре струје, напона и емс e_C ,
 - највише фазорски дијаграм,
 - представити величине у комплексном облику,
 - реактивну снагу,
 - тренутне вредности напона и емс кондензатора.
3. Ако је $f = 2 \text{ kHz}$ и $X_C = 20 \text{ k}\Omega$, нађиће C .
4. Колика је импеданса кондензатора о коме се говори у другом задатку?

7. Тригонометријске функције

7.1. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ОШТРОГ УГЛА

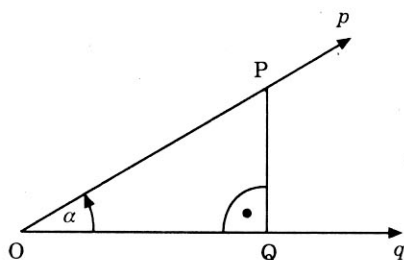
Нека су Op и Oq краци оштрог угла α . Нека је P произвољна тачка крака Op и нека је Q подножје нормале из тачке P на крак Oq (сл. 7.1).

Размера $\frac{PQ}{OP}$ назива се синус угла α ,

размера $\frac{OQ}{OP}$ назива се косинус угла α ,

размера $\frac{PQ}{OQ}$ назива се тангенс угла α , а

размера $\frac{OQ}{PQ}$ назива се котангенс угла α .

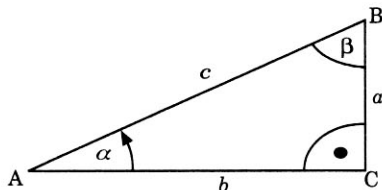


Сл. 7.1

$$\sin \alpha = \frac{PQ}{OP}; \cos \alpha = \frac{OQ}{OP}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{OQ}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{OQ}{PQ}. \quad (7.1)$$

Ове функције угла α називају се тригонометријске функције.

Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена C и нека је α угао BAC (сл. 7.2).



Сл. 7.2

Тада тачка B припада краку AB угла α , а тачка C је њена пројекција на крак AC угла α . Ако ставимо: $a=BC$; $b=AC$; $c=AB$, имамо:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (7.2)$$

Ако је α оштар угао правоуглог троугла, тада је:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}}; \cos \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}},\end{aligned}\quad (7.3)$$

при чему, кад кажемо катета или хипотенуза мислимо на њихове дужине.

Сваком оштром углу α можемо придружити позитивне реалне бројеве: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, дефинисане релацијом 7.1. Тригонометријске функције су међусобно повезане.

Из једнакости 7.2 добијамо:

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = \sin \alpha, \text{ па следи: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.\quad (7.4)$$

Такође је:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.\quad (7.5)$$

Из једнакости 7.2 је:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.\quad (7.6)$$

У троуглу са слике 7.2 код темена B обележимо угао β . Збир углова α и β је 90° . Сада је:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \sin \beta = \frac{b}{c}; \cos \beta = \frac{a}{c}, \text{ односно}$$

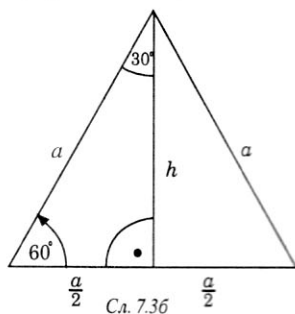
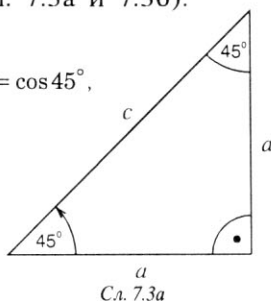
$$\sin \alpha = \cos \beta, \sin \beta = \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta, \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.\quad (7.7)$$

Вредности тригонометријских функција израчунавамо помоћу цепних рачунара или таблица. За углове од 45° , 30° и 60° израчунаћемо те вредности помоћу једнакокраког правоуглог троугла и помоћу једнакостраничног троугла и његове висине (сл. 7.3а и 7.3б).

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ,$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{2}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ,$$

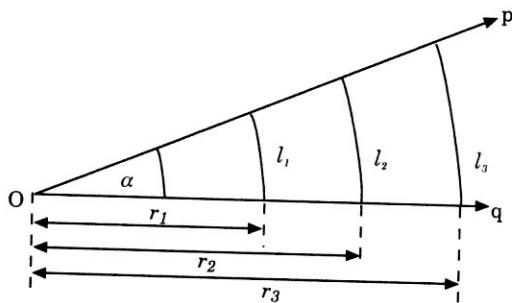
$$\cos 60^\circ = \frac{2}{a} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$



Читаоцу се оставља да на основу дефиниција израчуна тангенс и котангенс ових углова.

7.2. ДЕФИНИЦИЈА РАДИЈАНА

Угао се мери степенима и деловима степена или градусима и деловима града (програм математике за основну школу). Кружни лук може се мерити степенима и градусима и има онолико степени или гради колико их има одговарајући централни угао. Једном истом централном углу одговара неограничено много кружних лукова с једнаком мером у личним степенима, али дужине тих лукова су различите (сл. 7.4); ови луци припадају круговима различитих полупречника.



Сл. 7.4

Из обрасца за дужину кружног лука:

$$l = r \cdot \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}, \quad (7.8)$$

где је α мера одговарајућег централног угла у степенима, можемо написати:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_3}{r_3} = \dots = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ} = \frac{l}{r}. \quad (7.9)$$

Другим речима, количник дужине ма којег кружног лука и његовог полупречника једнак је за све лукове са истим централним углом.

Број $\frac{l}{r}$ може се узети као мерни број дужине кружног лука ако је као јединица за мерење узет лук чија је дужина једнака полупречнику ($l=r$). Ова јединица $\frac{l}{r}=1$ назива се радијан. Према томе, радијан (лук чија је дужина једнака полупречнику) је јединица за мерење кружног лука. Централни угао који одговара луку од једног радијана узима се као јединица за мерење угла. И ова јединица се назива радијан. По дефиницији радијанска мера полукруга полупречника r или угла чија је мера 180° јесте однос дужине полукруга према полупречнику:

$$\frac{l}{r} = \frac{r \cdot \pi}{r} = \pi, \text{ па је } \pi \text{ радијана} = 180^\circ. \quad (7.10)$$

Из једнакости 7.10 је: $1 \text{ радијан} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44,8''$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радијана} = 0,01745 \text{ радијана}. \quad (7.11)$$

За π је узета приближна вредност 3,14159, па су и вредности и релације 7.11 приближне.

Неке углове у степенима можемо једноставно израчунати у радијанима на следећи начин:

$$\begin{aligned} \alpha = 30^\circ &= \frac{180^\circ}{6} = \frac{\pi}{6} \quad (\text{читамо } \pi \text{ шестина}); & \alpha = 45^\circ &= \frac{180^\circ}{4} = \frac{\pi}{4}; & \alpha = 60^\circ &= \frac{180^\circ}{3} = \frac{\pi}{3}; \\ \alpha = 90^\circ &= \frac{180^\circ}{2} = \frac{\pi}{2}; & \alpha = 120^\circ &= 2 \cdot 60^\circ = \frac{2\pi}{3} \quad (\text{читамо два } \pi \text{ трећина}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Ако је α угао измерен у радијанима, онда се у степенима израчунава по обрасцу:

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}. \quad (7.13a)$$

Пример: $\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha^\circ = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$.

Ако је угао α измерен у степенима за израчунавање одговарајуће радијанске мере користимо следећи образац:

$$\alpha = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}. \quad (7.13b)$$

Пример: $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$.

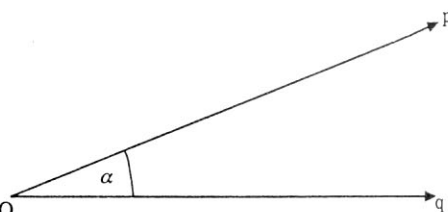
7.3. ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ КРУГ И ТОК ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА $y = \sin x$ и $y = \cos x$

7.3.1. УОПШТЕЊЕ ПОЈМА УГЛА

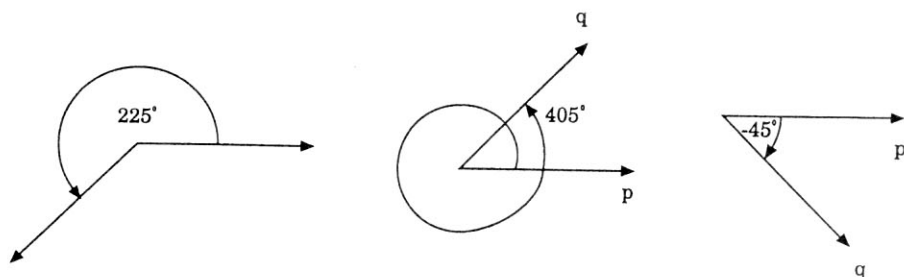
Дефиниција по којој угао чине две полуправе са заједничким почетком није погодна за сабирање и одузимање углова. Под операцијама сабирања и одузимања углова подразумевамо сабирање и одузимање мерних бројева тих углова. Као резултат ових операција могу се јавити углови већи од 360° , на пример: $120^\circ + 290^\circ$, а исто тако и негативни углови, на пример: $90^\circ - 130^\circ$

Уочимо полуправу која може да се обрће око своје почетне тачке O (сл. 7.5).

При обртању, разликујемо два смера: позитиван – смер обрнут смеру кретања казаљке часовника и негативан смер – смер кретања казаљке часовника. Обележимо са p почетни, а са q завршни положај полуправе. Угао $pq = \alpha$ називамо оријентисан угао. Ако се полуправа обртала у позитивном смеру оријентисани угао је позитиван, у супротном је негативан. Мера оријентисаног угла изражава се одговарајућим јединицама са придруженим знаком. На слици 7.6 приказани су оријентисани углови од 225° , 405° , -45° .



Сл. 7.5



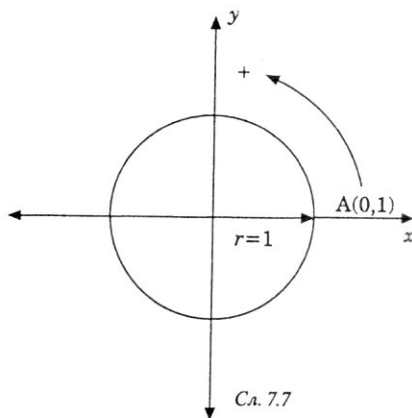
Сл. 7.6

За сваки угао α постоји угао α_0 : $0 \leq \alpha_0 \leq 2\pi$ или $0^\circ \leq \alpha_0 \leq 360^\circ$, такав да је: $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$ или $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$, где је $k = (0; \pm 1; \pm 2; \dots)$. Угао α_0 је основни угао. Пример: $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$, где је $\alpha_0 = 45^\circ$, а $k = 1$.

7.3.2. ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ КРУГ

Тригонометријске функције оштрог угла дефинишу се преко односа страница правоуглог троугла. За дефиницију ових функција произвољног угла користимо тригонометријски круг. Тригонометријски круг је круг полупречника $r=1$, чији је центар у координатном почетку (сл. 7.7).

Тачка $A(1, 0)$ која припада овом кругу назива се почетна тачка. Лук који обилазимо у позитивном смеру почевши од тачке је позитиван лук. Ако је смер обиласка негативан имамо негативан лук. Ако је $\widehat{AM}$ оријентисан лук онда њему одговара



Сл. 7.7

оријентисан угао α који образују вектори $\vec{OA}$ и $\vec{OM}$ (сл. 7.8). Вектор $\vec{OM}$ назива се радијус вектор угла α .

Мера лука $\widehat{AM}$ једнака је радијанској мери угла α . На овај начин се сваком оријентисаном луку додељује реалан број и обрнуто: сваком реалном броју додељује се оријентисани лук.

За оријентисани угао α кажемо да је у првом квадранту ако крак OM лежи у првом квадранту координатног система. Важи следеће:

I квадрант: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; II квадрант: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

III квадрант: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; IV квадрант: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. (7.14)

Углови $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ и $\frac{3\pi}{2}$ су гранични.

За дефиницију тригонометријских функција произвољног угла α користимо тригонометријски круг. Ако су координате тачке Mx_0 и y_0 тада је по дефиницији (сл. 7.8):

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{1} = y_0, \quad \cos \alpha = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{1} = x_0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_0}{y_0}, \quad (7.15)$$

Из ове дефиниције следи да вредности тригонометријских функција могу бити позитивне, негативне и нула.

Пример: Израчунати $\sin x$ и $\cos x$ ако је:

а) $\alpha = 0$, б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, в) $\alpha = \pi$, г) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, д) $\alpha = 2\pi$. (сл. 7.9)

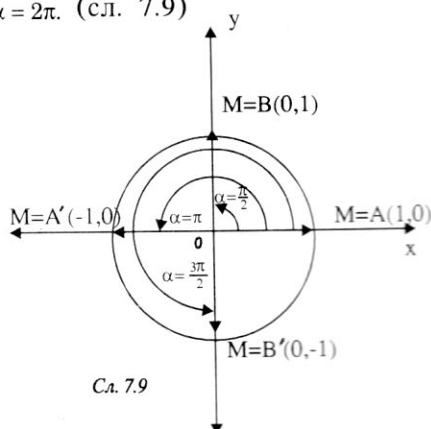
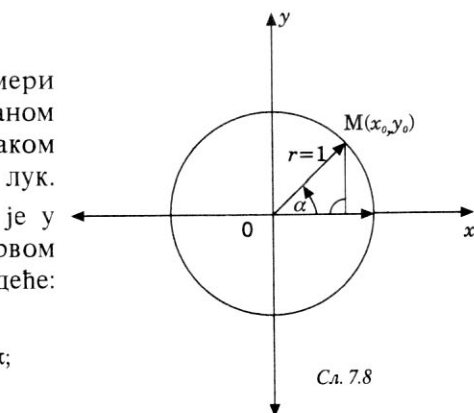
а) $\vec{OA} = \vec{OM} \Rightarrow \sin 0 = 0; \cos 0 = 1$

б) $\vec{OB} = \vec{OM} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1; \cos \frac{\pi}{2} = 0$

в) $\vec{OA'} = \vec{OM} \Rightarrow \sin \pi = 0; \cos \pi = -1$

г) $\vec{OB'} = \vec{OM} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{2} = -1; \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

д) $\vec{OA} = \vec{OM} \Rightarrow \sin 2\pi = 0; \cos 2\pi = 1$



На основу овог примера закључујемо:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1. \quad (7.16)$$

Читаоцу се оставља да одреди тангенс и котангенс ових углова.

Вредности $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ понављају се са периодом $T=2\pi$, а $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ са периодом $T=\pi$.

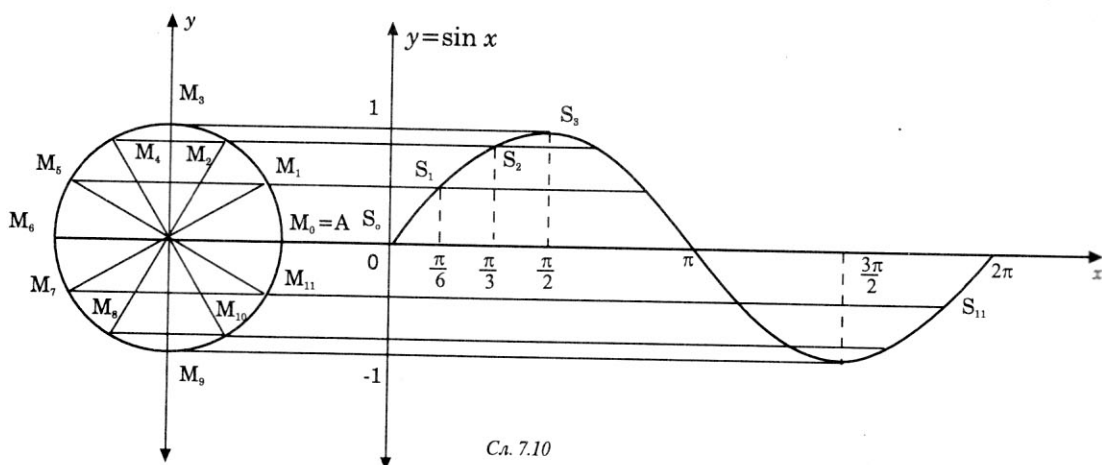
За негативно оријентисане углове важи: $\sin(-\alpha)=-\sin \alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos \alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg} \alpha$.

7.3.3. ТОК ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА $y=\sin x$ и $y=\cos x$

Ако је x неки реалан број онда њему одговара угао (лук) чија је мера x радијана. Овом углу (луку) одговара одређена вредност $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. У овом случају x је аргумент конкретне тригонометријске функције. График је веома погодно средство за представљање тока функције, тј. промене вредности функције од промене аргумента.

График функције $y=\sin x$

Због периодичности, за цртање графика над интервалом од $[0, 2\pi]$.

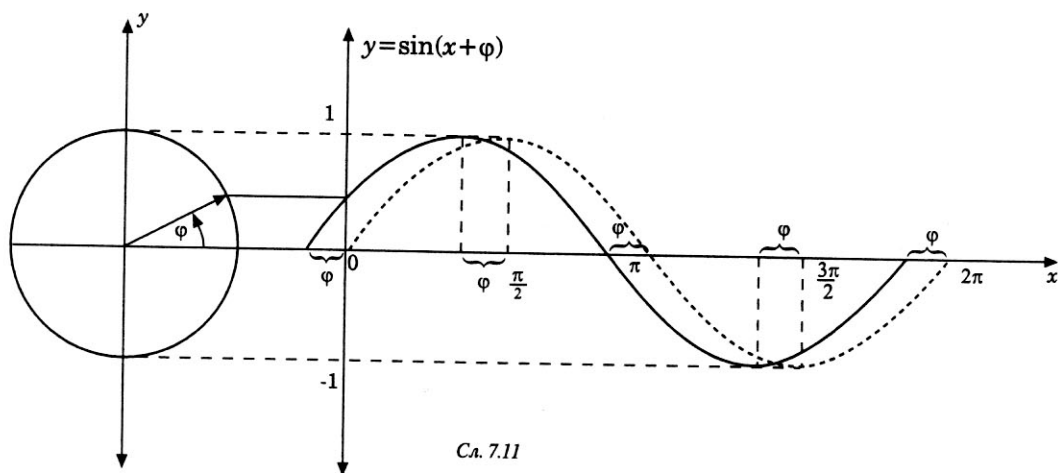


Сл. 7.10

У ту сврху изделимо тригонометријски круг на дванаест једнаких лукова и сваки по $\frac{\pi}{6}$ тачкама $M_0, M_1, \dots, M_{11}$. Сада у координатни систем унесемо тачке $S_0(0, \sin 0)$, $S_1(\frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6})$, ..., $S_{11}(\frac{11\pi}{6}, \sin \frac{11\pi}{6})$ (сл. 7.10).

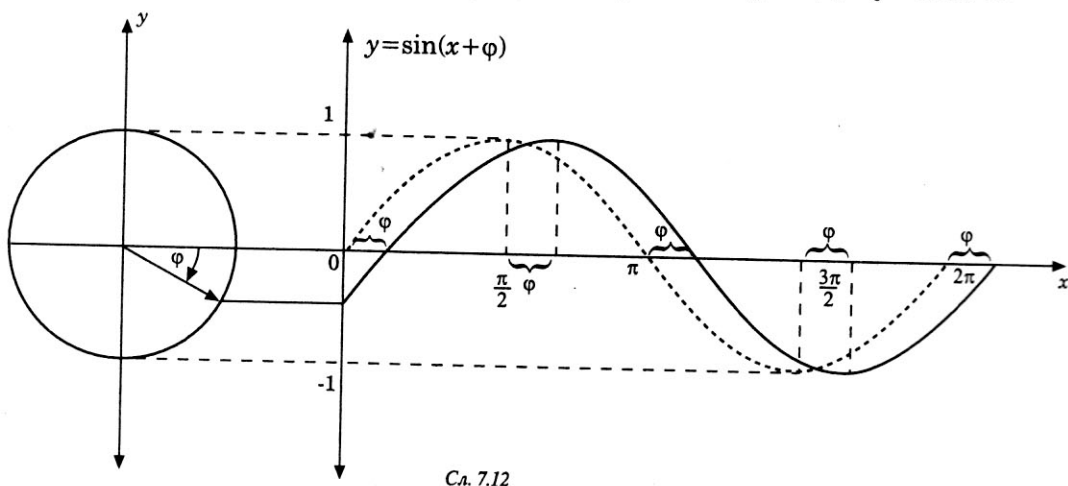
Остатак графика добије се трансляцијом свих тачака за $2k\pi$ дуж x осе. Тако настаје непрекидна, бесконачна, таласаста крива која се назива синусоида.

График функције $y=\sin(x+\varphi)$



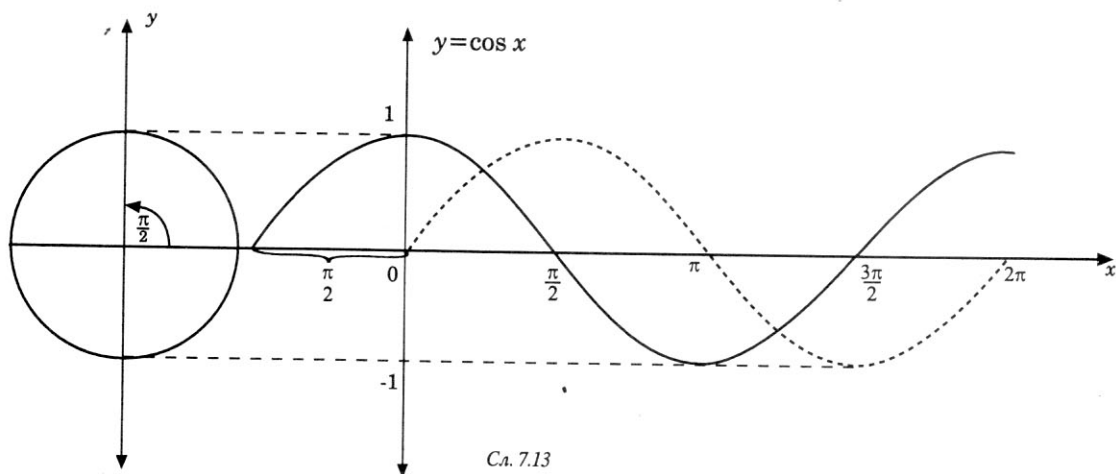
На тригонометријском кругу одредимо почетни угао φ који може бити ма који број већи или мањи од нуле (сл. 7.11).

Угао φ у теорији простопериодичних струја назива се почетна фаза. Ако је $\varphi > 0$ онда функција $y=\sin(x+\varphi)$ фазно предњачи функцији $y=\sin x$ за



угао φ . Све тачке графика добијемо померањем тачака функције $y=\sin x$ улево за угао φ дуж x осе.

Ако је $\varphi < 0$ све тачке функције $y=\sin x$ померамо удесно за φ дуж x осе (сл. 7.12).



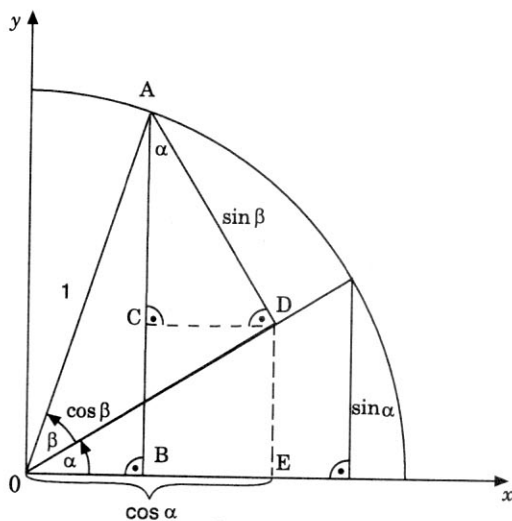
Сл. 7.13

Сада је лако нацртати график функције $y = \cos x$. Како је $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, то је $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (сл. 7.13).

Детаљна математичка анализа ових функција изведена је у предмету математика за други разред средње школе, што није од посебног значаја у предмету основе електротехнике.

7.3.4. АДИЦИОНЕ ТЕОРЕМЕ ЗА $\sin(\alpha \pm \beta)$ И $\cos(\alpha \pm \beta)$

Адиционе теореме су формуле помоћу којих функције $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$ израчунавамо преко функција $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \alpha$ и $\cos \beta$. За извођење ових формула послужиће нам тригонометријски круг са слике 7.14.



Сл. 7.14

$$\sin(\alpha+\beta)=AB=AC+CB=AC+DE. \quad (7.18)$$

$$AC=AD \cos \alpha, AD=\sin \beta, AC=\sin \beta \cos \alpha;$$

$$CB=DE=OD \sin \alpha, OD=\cos \beta, CB=\cos \beta \sin \alpha, \text{ па је из релације 7.18:}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (7.19)$$

Ако уместо β уврстимо $(-\beta)$, онда је:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (7.20)$$

Са слике 7.14 је:

$$\cos(\alpha+\beta) = OB = OE - BE = OE - CD. \quad (7.21)$$

$$OE=OD \cos \alpha, OD=\cos \beta, BE=CD=AD \sin \alpha, AD=\sin \beta, \text{ па је:}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (7.22)$$

Ако уместо β уврстимо $(-\beta)$, онда је:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (7.23)$$

Пример: Без употребе таблица и џепног рачунара израчунати $\sin \frac{2\pi}{3}$ и $\cos \frac{2\pi}{3}$.

Можемо написати: $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \alpha + \beta$, па је:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Или: $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \alpha - \beta$, па је:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \pi \cos \frac{\pi}{3} - \cos \pi \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \pi \cos \frac{\pi}{3} + \sin \pi \sin \frac{\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Израчунати $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ помоћу адиционих теорема ако је: $\alpha = 105^\circ$; 150° ; 210° ; 225° ; 315° и 330° .